بسم الله الرحمن الرحیم

چندجمله‌ای‌ها

نگارش براساس نظام آموزشی

کانون ریاضیدانان زمان

مؤلـف: ندا صالحی یانسری

نظارت: علـی خزائـی

مقدمه

گستردگی و تعمیق دانش ریاضی از سویی و کاربرد وسیع آن در سایر علوم به حدی است که این علم مادر همه علوم لقب گرفته است. وسعت کاربرد این دانش در علوم مختلف من‌جمله علوم مهندسی، علوم کشاورزی، علوم انسانی، علوم پزشکی، علوم کامپیوتر و ... بر اهمیت فراگیری آن از سوی دانش‌آموزان، دانش‌پژوهان و دانشجویان می‌افزاید. البته یادگیری ریاضیات را می‌توان به دو منظور خلاصه کرد. ضمن تحقق اهداف کاربردی آن و رفع نیازهای زندگی روزمره، باعث پرورش توانایی‌های ذهنی، تقویت قدرت تفکر منطقی، ایجاد و تقویت نظام فکری و افزایش قدرت طبقه‌بندی مفاهیم و آموخته‌های علمی و خلاصه تقویت قدرت برنامه‌ریزی در همه امور می‌گردد.

یکی از ابزارهای قدرتمند برای تفهیم مفاهیم ریاضیات، کتاب‌های کمک درسی با نگاهی جدید می‌باشد. کانون ریاضیدانان زمان به عنوان جامع‌ترین مرکز تخصصی در جهت آموزش و نشر علوم ریاضیات در کلیه مقاطع و سطوح و با هدف ایجاد علاقه نسبت به درس ریاضی برای همه و با ارائه روش‌های نوین، در جهت تکمیل نظام آموزشی اقدام به تألیف و چاپ کتاب‌های کمک‌درسی در دو سطح مقدماتی و پیشرفته برای مقاطع ابتدایی و راهنمایی و همچنین تألیف و چاپ کتاب‌های موضوعی در مقطع دبیرستان کرده است.

امید است معلمین و مدرسین گرامی و همچنین دانش‌آموزان، دانش‌پژوهان و دانشجویان عزیز پس از مطالعهٔ کتاب‌های کانون، نظرات و پیشنهادات خود را منعکس نموده و ما را در ادامه راه کمک نمایند.

کانون ریاضیدانان زمان

مقدمه مؤلف

ثنا و حمد بی‌پایان خدا را

پیشکش به ساحت ربانی حضرت بقیه‌ا... «عج»

و تقدیم به پدر و مادر عزیز و دوست داشتنی‌ام که سایه‌هایشان بر زندگی‌ام رحمت و وجودشان نعمتی است که ثانیه ثانیه زندگی‌ام را برای داشتنش به درگاه احدیت شکرگزارم.

خداوند بزرگ را شاکریم که قدرت فهم و یادگیری را به ما عطا نمود تا بوسیله آن بتوانیم مسیر زندگی خود را با درایت و آگاهی انتخاب کرده و راهنمای دیگران باشیم.

درس ریاضی یکی از درس‌های مهم و بنیادی دوران تحصیل شماست. شما با آموختن آن، روش درست اندیشیدن برای حل مسایل را فرا می‌گیرید و با محاسبه‌های عددی مورد نیاز در سایر دروس و محیط پیرامون آشنا می‌شوید.

به یاد داشته باشید همان‌طور که با دیدن شنای شناگران، نمی‌توان شنا یاد گرفت و برای شناگر شدن باید وارد آب شد، برای یادگیری ریاضی، خواندن و شنیدن مطالب ریاضی کافی نیست.

کتاب چندجمله‌ای‌ها به بررسی دقیق و توسعه یادگیری مبحث چندجمله‌ای‌ها به‌صورت تخصصی به دانش‌پژوهان برای رسیدن به رشد درک ریاضی در یک موضوع خاص پرداخته است.

بنابراین کتاب حاضر این قابلیت را دارد که هم به عنوان کتاب درسی در دوره دبیرستان و هم برای مدرسین که تازه شروع به کار کردند و می‌خواهند روش‌های تدریس خود را با تحقیقات کنونی هماهنگ کنند و همچنین برای دانشجویان عزیز به عنوان یک کتاب جامع مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

کتابی که شما پیش رو دارید شامل موارد ذیل می‌باشد:

- ❋ تدریس مباحث به صورت کامل همراه با نکات کلیدی
- ❋ ارایه مثال‌های متنوع و به صورت کامل همراه با حل تشریحی
- ❋ تمرین‌های بدون پاسخ
- ❋ تمرین‌های پایان هر بخش همراه با حل تشریحی
- ❋ سؤالات چهارگزینه‌ای همراه با حل تشریحی

در پایان لازم می‌دانم از بذل توجه و عنایات مدیریت محترم کانون ریاضیدانان زمان، استاد گرامی جناب آقای علی خزایی که مرا در تألیف این کتاب یاری نموده‌اند، کمال تشکر و قدردانی را به عمل آورم.

ندا صالحی یانسری

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

چند جمله‌ای‌ها

مقدمه

در این بخش ابتدا به تعریف متغیر و عبارت جبری سپس به معرفی چند جمله‌ای‌ها و اعمال روی آن‌ها می‌پردازیم.

بخش اول: عبارت‌های جبری

به عدد ۲ و حرف x دقت کنید.

در ریاضیات، ۲ هرگز متغیر نیست، چون دقیقاً گویای تعداد مشخصی از یک چیز است. مثلاً می‌گوییم، ۲ دانش‌آموز، ۲ کتاب، ۲ مدرسه، ۲ لیوان و ... اما به حرف x که می‌تواند هر عددی را بپذیرد، یک متغیر گویند. مثلاً به جای x می‌توان عدد ۰ یا ۴ یا ۱− یا ۱۰۰۰ و ... دیگر را قرار داد.

بنابراین به نماد (حرف) x که می‌توان عدد دلخواهی را به جای آن قرار داد متغیر گویند. البته توجه کنید که لزومی ندارد حتماً از حرف x به عنوان متغیر استفاده کنیم می‌توان از سایر حروف لاتین نیز به عنوان متغیر استفاده کرد. مثلاً y، z، t، w، m و ... هر کدام را یک متغیر گویند.

مثال ۱: آیا تعداد برگ‌های یک درخت را می‌توانیم به صورت یک عدد بیان کنیم؟

جواب: درختی را انتخاب کرده و تعداد برگ‌های آن را می‌شماریم، مثلاً فرض کنید تعداد برگ‌های درخت مفروض ۵۰۱۴۱ باشد داریم: ۵۰۱۴۱ = تعداد برگ‌های درخت

درخت دیگری را انتخاب می‌کنیم و تعداد برگ‌های آن را می‌شماریم، و این کار را به همین ترتیب ادامه می‌دهیم، مشاهده می‌کنید که هر بار برای تعداد برگ‌های هر درختی عدد مختلفی بدست می‌آید، بنابراین با استفاده از تعریف متغیر می‌توان نمادی برای تعداد برگ‌های درختان اختیار کرد.

عبارت جبری:

به زبان خیلی ساده یعنی تلفیقی از عدد و متغیر. مثلاً $۲x$، $۷y$، z، $۹w^۲$، $۵x\sqrt{y}$، $۳xy$، $۴x^۲y$، $x+y$، $۳x^۲+۲y$، $\frac{\sqrt{x}}{۵y+۷}$، -۶ و ...

چنان‌که مشاهده می‌کنید در هر یک از مثال‌های بالا علاوه بر عدد، یک حرف نیز در کنار آن آمده است، مثلاً در عبارت $۲x$، به x متغیر و به ۲ عدد می‌گویند. از کنار هم بودن این دو (متغیر و عدد) یک عبارت جبری به نام $۲x$ حاصل می‌شود. در این‌صورت می‌توانیم به عدد، ضریب متغیر هم بگوییم، پس در $۷y$ به y متغیر و به ۷ ضریب متغیر می‌گوییم.

عبارت جبری یک متغیری و چند متغیری:

عبارتی که در آن تنها یک متغیر بکار رفته باشد عبارت جبری یک متغیری می‌گویند، مثلاً $x+۵$، $\frac{x+۲}{۳}$، $x^۲+x$، $\sqrt{x}$، $\frac{x+۵}{x\sqrt{x}}$، $۶x^۲+۵\sqrt{x+۱}$ و ... ولی عبارت جبری که بیش از یک متغیر در آن به کار رفته باشد عبارت جبری چند متغیری می‌گوئیم، مثلاً عبارت $۷xy$ یا $۷x+y$ دو متغیری و عبارت $۷xyz$ سه متغیری است، پس بسته به تعداد متغیرها به ترتیب عبارت‌های جبری یک متغیری، دو متغیری، سه متغیری و ... خواهیم داشت.

مثال۲: عبارت جبری $x^۲+y^۲+xy$ شامل دو متغیر x و y است، پس یک عبارت جبری دومتغیره می‌باشد.

مثال۳: عبارت جبری $۷z^۶+۳x^۵+x^۳+۴xyz$ شامل سه متغیر x و y و z است، پس آن را یک عبارت جبری سه متغیره می‌نامند.

تمرین۱: تعداد متغیرها را در عبارت $\frac{x^۳}{۲}+\frac{۱}{y^۲}+\sqrt{xy}$ تعیین کنید.

اقسام عبارت‌های جبری:

عبارت‌های جبری با توجه به نماهایی که متغیرهای آنها دارد به گونه‌های مختلف تقسیم می‌شوند.

۱- عبارت جبری صحیح:

اگر در عبارت جبری، توانهایی را که متغیرها دارند، عضوی از مجموعه اعداد صحیح و **نامنفی** ($\mathbb{Z} > ۰$) باشند، آن را یک **عبارت جبری صحیح** می‌نامیم.

مثال۳: عبارت‌های جبری زیر صحیح هستند.

الف) $x^۲ + ۲x$	ب) $۴xy^۳z^۲$	ج) $x^۳y^۲ + y$
د) $\sqrt{۲}y^۵ - xz$	هـ) $y^۴ + y^۲ + ۱$	و) $x^۵y^۶z + x^۷z^۳ + y^{۱۱}x^۲$

مثال۴: کدام‌یک از عبارتهای جبری زیر عبارت صحیح است؟

الف) $x^۵ + y^{-۵}$

جواب: متغیر y در این عبارت دارای توان منفی است پس این عبارت، عبارت جبری صحیح نمی‌باشد.

ب) $\sqrt{x} + ۱$

جواب: متغیر x در این عبارت زیر رادیکال می‌باشد ($\sqrt{x} = x^{۱/۲}$) پس دارای توان غیرصحیح است و این عبارت، یک عبارت جبری صحیح نیست.

ج) $x^۲ + y^۲ + z^۲ + xy + xz + yz$

جواب: در این عبارت کلیه‌ی توان‌های متغیرها، صحیح و نامنفی می‌باشد پس این عبارت، عبارت جبری صحیح است.

تمرین۲: کدام‌یک از عبارت‌های جبری زیر صحیح‌اند؟

الف) $x^{۳}+۵x+\sqrt{۲}$ ب) $(\frac{۱}{\sqrt{y}})^{۲}+۵y^{۳}+۴x$ ج) $\frac{۱}{x^{-۳}}+x$

۲- عبارت جبری کسری:

یک عبارت جبری را زمانی کسری گویند که حداقل یکی از متغیرهای آن در **مخرج** باشد یا متغیری مشاهده شود که توان آن **منفی** باشد.

مثال۵: عبارت‌های جبری زیر کسری هستند.

الف) $x+\frac{۱}{x}$ ب) $\frac{۱}{y+x}$ ج) $\frac{y}{۵x^{۲}}+x-۱$

د) $xy^{-۱}$ هـ) $x^{۲}+x^{-۱}+۵$ و) $x^{۳}+\sqrt{۵}x+\frac{۲}{a}$

تمرین۳: کدام‌یک از عبارت‌های زیر کسری هستند.

الف) $x^{-۵}+x^{-۳}+x^{-۱}+۱$ ب) $y^{۳}+y^{۲}+۱$ ج) $\frac{۱}{x^{۲}+y^{۲}}$

د) $x^{۳}y^{۷}z^{-۱}+\frac{۷}{۳}z^{-۲}$ هـ) $\frac{۱}{x^{-۲}}+xy+۶$ و) $\frac{۱}{۶y}+\sqrt{۷}z$

۳- عبارت جبری گویا:

یک عبارت جبری را نسبت به متغیری گویا گویند در صورتی که توان‌های مشاهده شده از آن متغیر در عبارت عضوی از مجموعه‌ی اعداد صحیح $(\mathbb{Z})$ باشد.

☑ **نکته:** تفاوت عبارت جبری گویا با عبارت جبری صحیح در آن است که در عبارت جبری گویا لزومی ندارد توان متغیر **نامنفی** باشد ولی در عبارت جبری صحیح توان متغیر باید **نامنفی** $\mathbb{R}>۰$ باشد.

☑ **نکته:** هر عبارت جبری صحیح را می‌توان یک عبارت جبری گویا نیز برشمرد.

مثال۶: عبارت‌های جبری زیر گویا هستند.

الف) $x^{۲}+x^{-۳}+۱$ ب) $\frac{۲}{x}+ay$ ج) $\frac{۱}{۵}x^{۲}+\frac{۵}{y^{۲}}$

د) $xy+\frac{۱}{xy}$ هـ) $x^{-۷}y^{۲}z^{۴}+x^{-۳}yz^{-۱}+x^{۲}$ و) $y^{۲}+xy^{-۱}+۴a$

۴- عبارت جبری گنگ:

هرگاه لااقل یک متغیر در عبارت باشد که توان آن غیرصحیح باشد، عبارت جبری را نسبت به آن متغیر یک عبارت جبری گنگ می‌نامیم. مثلاً $\sqrt{x}$، که همان $x^{\frac{۱}{۲}}$ است یک عبارت جبری گنگ می‌باشد.

مثال۷: عبارت $x+\sqrt{x+۱}+۲y$، نسبت به x گنگ و نسبت به y گویا می‌باشد.
(لازم به ذکر است متغیرهایی که زیر رادیکال قرار می‌گیرند توانشان کسری است).

تمرین۴: کدام‌یک از عبارت‌های زیر گنگ و کدام‌یک گویا است.

الف) $x^{-۵}+x^{۳}+\sqrt{۲}$ ب) $x^{\frac{۷}{۲}}+xy$ ج) $\sqrt{x^{۲}+y^{۲}}$

د) $\frac{۱}{x^{۶}-y^{۶}}$ هـ) $\frac{\sqrt{۵}}{y^{۲}}+\frac{\sqrt{۳}}{y}+\frac{۱}{۲}$ و) $\frac{۱}{\sqrt[۳]{y}}+\frac{۱}{\sqrt[۲]{y}}+\frac{۱}{x+y}$

مقدار عددی یک عبارت جبری:

حوض خالی را در نظر بگیرید. می‌خواهیم آن را به وسیله‌ی شیر آبی پر کنیم، اگر در هر دقیقه توسط شیر، ۲ لیتر آب به حوض اضافه شود، مقدار آب درون حوض در دقیقه tام، یک عبارت جبری به صورت $۲t$ می‌باشد که متغیر t در آن بیانگر تعداد دقیقه‌های گذشته می‌باشد.

مثلاً اگر در دقیقه‌ی چهارم بخواهیم مقدار آب حوض را به دست آوریم، کافی است که به جای t در عبارت $۲t$، مقدار ۴ را قرار دهیم که این نشان می‌دهد در دقیقه‌ی چهارم مقدار آب حوض $۲\times۴=۸$ لیتر می‌باشد. چنان‌که می‌دانیم هر عبارت جبری، به ازای یک عدد مشخص که به جای متغیر آن قرار می‌دهیم، نشان‌دهنده‌ی یک عدد است، با جای‌گذاری عدد به جای متغیر در یک عبارت جبری یک عدد حاصل می‌شود و با این عمل می‌توانیم مقدار عددی عبارت جبری را به دست آوریم.

مثال۸: مقدار عددی عبارت‌های زیر را به ازای $x=-۱$ و $y=۲$ و $z=-۲$ به دست آورید.

الف) $x+۵$

جواب: $x+۵ \xrightarrow{x=-۱} (-۱)+۵=۴$

ب) $x^۲+۴x+۱$

جواب: $x^۲+۴x+۱ \xrightarrow{x=-۱} (-۱)^۲+۴(-۱)+۱=-۲$

ج) $xyz^۲+۱$

جواب: $xyz^۲+۱ \xrightarrow[z=-۲]{x=-۱,\, y=۲} (-۱)(۲)(-۲)^۲+۱=-۷$

د) $\sqrt[۳]{x}\times\sqrt{۵}\,y$

جواب: $\sqrt[۳]{x}\times\sqrt{۵}\,y \xrightarrow[y=۲]{x=-۱} \sqrt[۳]{-۱}\times\sqrt{۵}\,(۲)=(-۱)\times۲\sqrt{۵}=-۲\sqrt{۵}$

ه) $\frac{۱}{۲-x^۲}-x$

جواب: $\frac{۱}{۲-x^۲}-x \xrightarrow{x=-۱} \frac{۱}{۲-(-۱)^۲}-(-۱)=\frac{۱}{۲-۱}+۱=۲$

مثال۹: مربعی به ضلع a را در نظر بگیرید. محیط این مربعی مساوی با ۴a می‌باشد. یعنی اگر مربعی به ضلع a داشته باشیم برای یافتن مقدار محیط از عبارت جبری ۴a استفاده می‌کنیم. به ازای $a=۳$، محیط مربعی به ضلع ۳ سانتی‌متر به صورت $۴a=۴\times۳=۱۲$ سانتی‌متر است.

تمرین۵: مقدار عددی عبارت‌های زیر را به ازای عدد داده شده تعیین کنید.

۱) $\sqrt[۴]{x^۲}+۳\sqrt{x}+۶$ $\quad x=۹$

۲) $\frac{۴}{x^{-۱}y^{-۲}}+y^۳$ $\quad x=۴ \quad y=\frac{۱}{۲}$

۳) $x^۳+۴x^۲-۶x+۲$ $\quad x=-۱$

۴) $\frac{۲}{۳x^۲+y^۲+\sqrt{۵}}$ $\quad x=۳ \quad y=۵$

۵) $y^۳-(۱+x)^۲-۲x^۳$ $\quad x=۲ \quad y=-۱$

عبارت جبری معین (تعریف شده) و نامعین (تعریف نشده):

عبارت جبری را به ازای یک مقدار از متغیر (یا مقادیری از متغیرها) **معین** گویند، هرگاه حاصل آن عبارت جبری به ازای آن مقدار (مقادیر) یک عدد حقیقی باشد و کلیه عملیات به کار رفته قابل انجام باشد در غیر این صورت عبارت جبری **نامعین** است. همان‌طور که می‌دانیم اگر توان عددی زوج باشد حاصل آن عددی مثبت (نامنفی) است، مثلاً برای متغیر x $(x\in\mathbb{R})$ عبارتهای $x^۲$، $x^۴$، $x^۶$ و ... نامنفی‌اند، به همین دلیل عبارت‌های گنگ (رادیکالی) با فرجه زوج به ازای مقادیری از متغیرهایشان معین هستند که با قرار دادن آن مقادیر به جای متغیر، مقدار عبارت نامنفی شود، برای مثال عبارت $\sqrt{x+۱}$ زمانی تعریف شده است که مقدار $x+۱$ نامنفی شود، پس این عبارت به ازای همه‌ی اعداد حقیقی بزرگتر یا مساوی ۱- ، معین است، ($x+۱\geq ۰ \rightarrow x\geq -۱$.) همچنین عبارت‌های کسری زمانی جواب

معین دارند که مخرج کسرشان صفر نشود، زیرا طبق قرارداد $\frac{\text{عدد}}{\circ}=\infty$ ، تعریف نشده می‌باشد. مثلاً در عبارت $\frac{۱}{x}$ اگر به جای x عدد ۰ را جایگزین کنیم، مقدار عددی عبارت $\frac{۱}{\circ}$ می‌شود که عددی تعریف نشده است، پس عبارت $\frac{۱}{x}$ زمانی معین است که x مساوی ۰ نباشد.

حوزه تعریف عبارت جبری:

مجموعه‌ای از اعداد که به ازای هر عضوی از آن عبارت جبری به عبارتی معین تبدیل شود حوزه‌ی تعریف عبارت می‌نامیم.

☑ **نکته:** هر عبارت جبری صحیح همواره معین است لذا حوزه‌ی تعریف آن مجموعه اعداد حقیقی است. هر عبارت کسری به ازای مقادیری که مخرج کسر را صفر می‌کند نامعین و به ازای سایر مقادیر حقیقی معین است همچنین یک عبارت جبری کنگ با فرجه‌ی فرد همواره معین است و حوزه‌ی تعریف آن مجموعه‌ی اعداد حقیقی است، اما اگر فرجه زوج باشد عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد.

مثال۱۰: حوزه تعریف هر یک از عبارت زیر را به دست آورید؟

الف) $x^۲+۲x+۱$

جواب: عبارت جبری داده شده یک عبارت جبری صحیح است پس حوزه‌ی تعریف آن مجموعه‌ی اعداد حقیقی می‌باشد.

حوزه‌ی تعریف = $\mathbb{R}$

ب) $x^{3}+x^{-2}+1$

✍**جواب:** در عبارت جبری داده شده توان منفی مشاهده می‌شود و همه‌ی توان‌ها عضوی از اعداد صحیح‌اند پس عبارت جبری کسری است.

$$x^{3}+x^{-2}+1=x^{3}+\frac{1}{x^{2}}+1$$

$x^{2}\neq 0 \rightarrow x\neq 0$ حوزه‌ی تعریف $=\mathbb{R}-\{0\}$

ج) $\sqrt[3]{5-x^{2}}$

✍**جواب:** با توجه به این که فرجه‌ی رادیکال فرد است لذا این عبارت همواره معین است و حوزه‌ی تعریف آن مجموعه‌ی اعداد حقیقی است. حوزه‌ی تعریف $=\mathbb{R}$

د) $\sqrt{x-4}$

✍**جواب:** $x-4\geq 0 \rightarrow x\geq 4$

حوزه‌ی تعریف $=\{x \mid x\in\mathbb{R}\ ,\ x\geq 4\}$

ه) $\sqrt[3]{x}+\sqrt{x^{2}+5}$

✍**جواب:** می‌دانیم به ازای هر $x\in\mathbb{R}$، x^{2} عددی نامنفی است پس عبارت $x^{2}+5$ همواره مثبت می‌باشد. پس حوزه‌ی تعریف این عبارت همه‌ی اعداد حقیقی است.

حوزه‌ی تعریف $=\mathbb{R}$

مثال‌های پایانی بخش اول

مثال ۱: مقدار عددی عبارت $x^۲+۱$ را به ازای $x=-۱$ و $x=\sqrt{۲}$ و $x=۳$ به دست آورید.

جواب:

$$x=-۱ \rightarrow (-۱)^۲+۱=۱+۱=۲$$

$$x=\sqrt{۲} \rightarrow (\sqrt{۲})^۲+۱=۲+۱=۳$$

$$x=۳ \rightarrow (۳)^۲+۱=۹+۱=۱۰$$

مثال ۲: مقدار عددی عبارت $(x^۲-۵x+۷)^{۷۱}$، به ازای $x=-۱$ چقدر است؟

جواب:

$$x=-۱ \rightarrow ((-۱)^۲-۵(-۱)-۷)^{۷۱}=(-۱)^{۷۱}=-۱$$

مثال ۳: نشان دهید مقدار عددی عبارت زیر در صورتی که $a=b+۱$ برابر صفر است.

$$(a-b-۱)(a^۲b+۲ab^۲)$$

جواب: به جای a مقدار مساوی آن یعنی $b+۱$ را جایگزین می‌کنیم.

$$\underbrace{(b+۱-b-۱)}_{۰}((b+۱)^۲(b)+۲(b+۱)b^۲)=۰\times((b+۱)^۲b+۲(b+۱)b^۲)=۰$$

مثال ۴: اگر x قرینه‌ی y و z معکوس y باشد حاصل عبارت $\left[y^۲z^۲+z(x^۳y+y^۴)\right]^{۲۰}$ چیست؟

جواب: z معکوس y باشد $\leftarrow y=\frac{۱}{z}$ ‏ x قرینه y باشد $\leftarrow$ $\begin{matrix} y=-x \\ x=-y \end{matrix}$

مقدار $-y$ را به جای x در عبارت جایگزین می‌کنیم.

$$\left[y^۲z^۲+z(x^۳y+y^۴)\right]^{۲۰}=\left[y^۲z^۲+(z(-y)^۳(y)+y^۴)\right]^{۲۰}=\left[y^۲z^۲+z(-y^۴+y^۴)\right]^{۲۰}$$

$$=\left[y^۲z^۲\right]^{۲۰}$$

در عبارت $\left[yz^۲\right]^{۲۰}$ به جای y مقدار مساوی آن، یعنی $\frac{۱}{z}$ را قرار می‌دهیم.

$$\xrightarrow{y=\frac{۱}{z}}\left[y^۲z^۲\right]^{۲۰}=\left[(\frac{۱}{z})^۲z^۲\right]^{۲۰}=\left[\frac{۱}{z^۲}\times z^۲\right]^{۲۰}=[۱]^{۲۰}=۱$$

مثال۵: اگر $x=1$، $y=3$، $z=\frac{x+y}{2}$، مقدار عددی عبارت $4x^2yz^3$ را تعیین کنید؟

جواب: $x=1\ ,y=3\ ,z=\frac{1+3}{2}=2 \rightarrow x=1\ ,y=3\ ,z=2$

با جای‌گذاری مقادیر x و y و z در عبارت حاصل را بصورت زیر تعیین می‌کنیم.

$4x^2yz^3=4(1)^2(3)(2)^3=4\times3\times8=96$

مثال۶: به ازای چه مقادیری از x هر یک از عبارتهای زیر در مجموعه‌ی اعداد حقیقی تعریف شده‌اند؟

۱) $\frac{1}{x^4-16}$

جواب: عبارت به ازای همه‌ی مقادیر بجز ریشه‌های مخرج تعریف شده است.

$x^4-16=0 \ \rightarrow \ x^4=16 \ \rightarrow \ x=\pm2$

حوزه‌ی تعریف $=\mathbb{R}-\{\pm2\}$

۲) $\frac{\sqrt[3]{2x-1}}{\sqrt{1-x}}$

جواب: $1-x\ge0\ ،\ 1-x\ne0 \ \rightarrow 1-x>0$

$1-x>0 \ \rightarrow \ x<1$

حوزه تعریف $=\{x|x\in\mathbb{R}\ ,\ x<1\}=(-\infty\ ,1)$

۳) $\sqrt{x^2+1}$

جواب: $x^2+1\ge0$، می‌دانیم عبارت x^2 به ازای هر عددی در مجموعه‌ی اعداد حقیقی نامنفی است $(\forall x\in\mathbb{R}, x^2\ge0)$، پس عبارت x^2+1 همواره نامنفی است. و حوزه تعریف عبارت $\sqrt{x^2+1}$ همه‌ی اعداد حقیقی را شامل می‌شود.

حوزه‌ی تعریف $=\mathbb{R}$

۴) $\sqrt{۳-x}-\sqrt{۳+x}$

جواب: $۳-x\geq ۰$، $۳+x\geq ۰$، این عبارت، یک عبارت جبری گنگ می‌باشد که فرجه رادیکال‌های آن زوج است و شامل دو عبارت رادیکالی با فرجه زوج است، پس اشتراک حوزه‌ی تعریف هر کدام از رادیکال‌ها را به عنوان حوزه‌ی تعریف کل عبارت می‌پذیریم.

$۳-x\geq ۰ \rightarrow x\leq ۳ \rightarrow$ حوزه تعریف $=(-\infty\,,\,۳]$

$۳+x\geq ۰ \rightarrow x\geq -۳ \rightarrow$ حوزه تعریف $=[-۳\,,+\infty)$

حوزه تعریف عبارت $=(-\infty\,,\,۳]\cap[-۳,+\infty)=[-۳\,,\,+۳]$

۵) $\dfrac{x^{۳}+۱}{x(x^{۲}+۱)}$

جواب: $x(x^{۲}+۱)\neq ۰$

$x=۰ \rightarrow$ حوزه تعریف $=\mathbb{R}-\{۰\}$

$x^{۲}+۱=۰ \rightarrow x^{۲}=-۱$ غیرقابل قبول

پس عبارت $x^{۲}+۱$ به ازای هر عدد حقیقی که جایگزین متغیر x آن شود، صفر نمی‌شود و همواره مثبت است.

حوزه تعریف $=\mathbb{R}$

حوزه تعریف عبارت $=\mathbb{R}-\{۰\}$

۶) $\dfrac{\sqrt{۴x}}{۲x+۱}$

جواب: $۴x\geq ۰$، $۲x+۱\neq ۰$

$۴x\geq ۰ \rightarrow x\geq ۰ \rightarrow$ حوزه تعریف $=[۰,+\infty)$

$۲x+۱=۰ \rightarrow x=-\frac{۱}{۲} \rightarrow$ حوزه تعریف $=\mathbb{R}-\left\{-\frac{۱}{۲}\right\}$

حوزه تعریف عبارت $=[۰\,,\,+\infty)$

تمرین‌های پایانی بخش اول

۱) مقدار عددی عبارت $x^4 + x^3 + x^2 + 1$ را به ازای $x = -1$ به دست آورید؟

۲) مقدار عددی $2\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x}$ را به ازای $x = 8$ به دست آورید؟

۳) مقدار عددی $x^2 + 2x^2y + 2yx^3 + y^2$ را به ازای $x = -2$ و $y = -1$ بدست آورید؟

۴) مقدار عددی عبارت‌های $(a+b)^2$، $(ab)^2$، ab^2، a^2b را به ازای $a = 2$ و $b = 3$ حساب کرده و مقایسه کنید.

۵) مقدار عددی عبارت‌های $(-x)^2$ و $-x^2$ را به ازای $x = -1$ حساب کرده و مقایسه کنید.

۶) اگر $x - y + 1 = 0$، حاصل $\dfrac{4^x}{4^{y-1}}$ چیست؟

۷) اگر حاصل $x^2 - bx + 4$ به ازای $x = 1$ مساوی ۳ شود، مقدار عبارت به ازای $x = -1$ چیست؟

۸) مقدار عددی عبارت $\dfrac{ax + by + 2}{4}$، به ازای $x = 0$ و $y = 0$ چیست؟

۹) عبارت $1 - 2x^2$ را به ازای $x = a + 1$ و برحسب a تعیین کنید؟

۱۰) حوزه تعریف هر یک از عبارت‌های زیر را در مجموعه اعداد حقیقی تعیین کنید؟

۱) $\dfrac{x+5}{x+1}$ ۲) $\sqrt{2x^2 - 6}$

۳) $\sqrt{\dfrac{2x+5}{6}}$ ۴) $2x^5 + x^3 - \sqrt{2}\,x$

۵) $\dfrac{\sqrt{x^{۲}+x}}{\sqrt[۳]{۲x^{۳}+۱}}$ ۶) $\sqrt{۴-x^{۲}}+\dfrac{۱}{x}$

۷) $۲\sqrt{x}+۳\sqrt{x^{۲}+۵}$ ۸) $\dfrac{x^{۲}}{۷x-۶}-\dfrac{۲x}{۵}$

۱۱) حاصل عبارت $x(x+y)+y(x+y)+(x+y)$ را به ازای $x+y=۵$ به دست آورید.

۱۲) مقدار عبارت $(x-۱)(x-۲)(x-۳)...(x-۹)$ را به ازای $x=۴$ تعیین کنید.

۱۳) اگر عبارت $۲x$ را دو برابر کنیم، حاصل آن چقدر می‌شود؟

۱۴) مقدار عددی عبارت $\dfrac{\frac{۱}{x}-\frac{۱}{y}+۱۲x^{۲}}{xa+y}$، به ازای $x=\dfrac{۱}{۳}$ و $y=\dfrac{۱}{۸}$ و $a=\dfrac{۱}{۴}$ چیست؟

۱۵) مقدار عددی عبارت $\dfrac{(x+y)^{۲}}{(x^{۲}+۲xy+y^{۲})}$ به ازای $x=۲$ و $y=۱$ چیست؟

۱۶) مساحت مربعی که یک ضلع آن a باشد را با یک عبارت جبری مشخص کنید.

۱۷) از سطح دایره‌ای به شعاع r، سطح مربعی به ضلع a را برداشته‌ایم، مساحت قسمت باقی‌مانده را به وسیله‌ی یک عبارت جبری نشان دهید.