بسم الله الرحمن الرحیم

# ریاضیات پایه دهم دوره دوم متوسطه تابستانه

## ریاضی (۱) – هندسه (۱)

**رشته ریاضی و فیزیک**

**تألیف: دپارتمان متوسطه دوم مؤسسه کانون ریاضیدانان زمان**
**نظارت عالی: علی خزایی**

سرشناسه : خزائی، علی، ۱۳۴۸ -
عنوان و نام پدیدآور : ریاضیات پایه دهم دوره دوم متوسطه تابستانه ریاضی (۱) —هندسه (۱) : رشته ریاضی و فیزیک
مشخصات نشر : تهران: مؤسسه کانون ریاضیدانان زمان، ۱۳۹۶.
مشخصات ظاهری : ۱۶۰ ص.؛ ۲۲×۲۹ س‌م.
شابک : 978-600-7903-87-2
وضعیت فهرست نویسی : فیپای مختصر
شناسه افزوده : کانون ریاضیدانان زمان
شماره کتابشناسی ملی : ۴۶۷۱۴۸۲

**نام کتاب: ریاضیات پایه دهم دوره دوم متوسطه تابستانه**
**تألیف: دپارتمان متوسطه دوم مؤسسه کانون ریاضیدانان زمان**
**شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۷۹۰۳-۸۷-۲**
**ISBN:978-600-7903-87-2**
**نوبت چاپ: چاپ اول ـ ۱۳۹۶**
**تیراژ: ۱۰۰۰ جلد**

**تعداد صفحات: ۱۶۰ صفحه**
**قیمت: ۲۰۰۰۰ تومان**

**ناشر: مؤسسه کانون ریاضیدانان زمان - تلفن مرکز پخش: ۷۵ ۵۵ ۹۵ ۸۸ (۰۲۱)**
**فروشگاه دائمی: تهران – میدان انقلاب - خیابان کارگر شمالی – نرسیده به بلوار کشاورز - پلاک ۱۵۴۷ - طبقه دوم - واحد ۳۳**

## پیش‌گفتار

گستردگی و تعمیق دانش ریاضی از سویی و کاربرد وسیع آن در سایر علوم به حدی است که این علم مادر همه علوم لقب گرفته است. وسعت کاربرد این دانش در علوم مختلف از جمله علوم مهندسی، علوم کشاورزی، علوم انسانی، علوم پزشکی، علوم کامپیوتر و ... بر اهمیت فراگیری آن از سوی دانش‌آموزان، دانش‌پژوهان و دانشجویان می‌افزاید. البته یادگیری ریاضیات را می‌توان به دو منظور خلاصه کرد. ضمن تحقق اهداف کاربردی آن و رفع نیازهای زندگی روزمره، باعث پرورش توانایی‌های ذهنی، تقویت قدرت تفکر منطقی، ایجاد و تقویت نظام فکری، افزایش قدرت طبقه‌بندی مفاهیم و آموخته‌های علمی و خلاصه تقویت قدرت برنامه‌ریزی در همه‌ی امور می‌گردد.

یکی از ابزارهای قدرتمند برای تفهیم مفاهیم ریاضیات، استفاده از منابع آموزشی کمک درسی با نگاهی جدید می‌باشد. کانون ریاضیدانان زمان به‌عنوان جامع‌ترین مرکز تخصصی آموزش، نشر و گسترش علم ریاضی، و با هدف ایجاد علاقه نسبت به درس ریاضی برای عموم و با ارائه‌ی روش‌های نوین آموزشی، اقدام به تألیف و چاپ ۸ عنوان کتاب کمک درسی در کلیه‌ی مقاطع تحصیلی نموده است. عناوین و توضیحات این کتاب‌ها به شرح زیر است:

۱) **مجموعه کتاب‌های تابستانه:** این کتاب‌ها در کلیه‌ی مقاطع تحصیلی تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها در قالب درسنامه‌ی مختصر ولی بسیار مفید و آموزنده به همراه نکات کلیدی، با رویکرد مروری بر گذشته و چشم‌اندازی به آینده (بخشی مربوط به مطالب سال‌های تحصیلی گذشته و بخشی نیز مربوط به سال تحصیلی آینده) است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در فصل تابستان مطالعه شوند.

۲) **مجموعه کتاب‌های مقدماتی:** این کتاب‌ها در مقاطع ابتدایی و متوسطه اول (راهنمایی) تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها در قالب درسنامه‌ی بسیار کامل همراه با آموزش دقیق مفاهیم ریاضی در سطح مقدماتی براساس مطالب کتاب‌های درسی آموزش و پرورش، ارائه‌ی مثال‌های متنوع همراه با پاسخ تشریحی، ارائه‌ی نکات مهم و کلیدی در جهت تکمیل مطالب و تمرین‌های بدون پاسخ پایان هر فصل است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در طول سال تحصیلی و همراه با کتاب درسی مطالعه شوند.

۳) **مجموعه کتاب‌های پیشرفته:** این کتاب‌ها در مقاطع ابتدایی و متوسطه اول (راهنمایی) تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها در قالب درسنامه‌ی بسیار کامل همراه با آموزش دقیق مفاهیم ریاضی در سطح پیشرفته و گسترده در ادامه‌ی مطالب کتاب‌های مقدماتی، ارائه‌ی مثال‌های متنوع همراه با پاسخ تشریحی، ارائه‌ی نکات مهم و کلیدی در جهت تکمیل مطالب و تمرین‌های بدون پاسخ پایان هر فصل است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در طول سال تحصیلی و همراه با کتاب درسی و کتاب مقدماتی مطالعه شوند.

۴) **مجموعه کتاب‌های جامع:** این کتاب‌ها در مقطع متوسطه دوم (دبیرستان) تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها در قالب درسنامه‌ی بسیار کامل همراه با آموزش دقیق مفاهیم ریاضی از سطح مقدماتی تا سطح پیشرفته براساس مطالب کتاب‌های درسی آموزش و پرورش، ارائه‌ی مثال‌های متنوع از سطح مقدماتی تا سطح پیشرفته همراه با پاسخ تشریحی، ارائه‌ی نکات مهم و کلیدی در جهت تکمیل مطالب، سؤالات تشریحی بدون پاسخ و سؤالات چهارگزینه‌ای همراه با پاسخ کلیدی و شگفتی‌های ریاضی در پایان هر فصل است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در طول سال تحصیلی و همراه با کتاب درسی مطالعه شوند.

**۵) مجموعه کتاب‌های تیزهوشان:** این کتاب‌ها در مقاطع ابتدایی و متوسطه اول (راهنمایی) جهت آمادگی دانش‌آموزان پایه‌ی ششم ابتدایی و پایه‌ی نهم متوسطه اول (راهنمایی) برای آزمون ورودی مدارس تیزهوشان، نمونه دولتی و برتر کشور در قالب درسنامه‌ی تستی همراه با نکات کلیدی و کاربردی در حل تست‌ها و سؤالات چهارگزینه‌ای با عنوان سنجش و ارزشیابی (۱) و (۲) به تألیف و چاپ رسیده‌اند. مطالعه‌ی این کتاب‌ها به دانش‌آموزان پایه‌های پنجم و ششم در مقطع ابتدایی و دانش‌آموزان پایه‌های هشتم و نهم در مقطع متوسطه اول (راهنمایی) پیشنهاد می‌گردد.

**۶) مجموعه کتاب‌های موضوعی:** این کتاب‌ها بیش‌تر جنبه‌ی تخصصی مباحث ریاضی مقطع متوسطه دوم (دبیرستان) را دارند و شامل درسنامه‌ی کامل، ارائه‌ی مثال‌های متنوع همراه با پاسخ تشریحی، نکات مهم و کاربردی در جهت تکمیل مطالب و تمرین‌های بدون پاسخ پایان هر فصل می‌باشند. این کتاب‌ها اطلاعات دانش‌آموزان را در مباحث مختلف ریاضی مقطع دبیرستان افزایش می‌دهند و باعث تقویت علمی آن‌ها در درس ریاضی و رفع ضعف‌های آن‌ها می‌شوند.

**۷) مجموعه کتاب‌های یکی من، یکی تو:** این کتاب‌ها در کلیه‌ی مقاطع تحصیلی تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها به این صورت است که یک سؤال همراه با روش حل (یکی من) توسط مؤلف طراحی شده و به دنبال آن، یک سؤال بدون حل (یکی تو) به دانش‌آموز واگذار شده است. سؤالات «یکی من» و «یکی تو» تقریباً مشابه یک‌دیگر هستند و طراحی آن‌ها کاملاً هوشمندانه و هدفمند است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در طول سال تحصیلی و به ویژه در ایام امتحانات مطالعه شوند.

**۸) مجموعه کتاب‌های «تفکر، تمرین، تسلط»:** این کتاب‌ها در کلیه‌ی مقاطع تحصیلی تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها به این صورت است که هر فصل از کتاب شامل سه بخش تفکر، تمرین و تسلط می‌باشد. در بخش «تفکر» مفاهیم مورد نیاز فصل و همچنین انتظاراتی که از دانش‌آموز می‌رود، به‌صورت مختصر و مفید بیان شده است؛ در بخش «تمرین» نمونه سؤالات امتحانی متنوعی در دو سطح مقدماتی و پیشرفته در اختیار دانش‌آموز قرار می‌گیرد و در بخش «تسلط» جهت سنجش و ارزشیابی دانش‌آموز، آزمونی از آن فصل به عمل می‌آید. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها همراه با کتاب‌های مقدماتی و پیشرفته مطالعه شوند.

امید است معلمین و مدرسین گرامی و همچنین دانش‌آموزان، دانش‌پژوهان و دانشجویان عزیز، پس از مطالعه‌ی کتاب‌های کانون، نظرات و پیشنهادات خود را منعکس نموده و ما را در ادامه‌ی راه یاری نمایند.

کانون ریاضیدانان زمان

مرکز تخصصی آموزش، نشر و گسترش فرهنگ ریاضی

**مقدمه**

«به نام نامی آفریننده نظام هستی»

**حضرت علی (ع):**

**کسی که با کتاب آرامش می‌یابد، هیچ آرامشی را از دست نداده است.**

سپاس خداوند بزرگ را که توفیق دیگری ارزانی داشت تا بتوانیم خدمتی هر چند کوچک در پیش‌برد علم و دانش این سرزمین عزیز بنماییم.

کتاب حاضر، بر مبنای نیازها و حل مشکلات دانش‌آموزان در درس ریاضی و در جهت ارائه‌ی روشی بسیار ساده در آموزش مفاهیم ریاضی که خلاصه‌نویسی مطالب همراه با انجام تمرین‌های متناسب در هر فصل می‌باشد، تألیف شده است. ازآنجاکه علم ریاضی علم پیوسته‌ای است، لذا در این کتاب سعی شده است مفاهیم و مطالب کتاب‌های درسی ریاضیات پایه دهم دوره دوم متوسطه رشته ریاضی و فیزیک که شامل ریاضی (۱) و هندسه (۱) می‌باشد، به‌صورت خلاصه و در راستای مروری بر سال‌های تحصیلی گذشته و چشم‌اندازی به سال تحصیلی آینده نگارش شود تا دانش‌آموزان در فصل تابستان، آمادگی مناسبی را برای شروع سال تحصیلی جدید کسب نمایند.

به دانش‌آموزان سرفراز و آینده‌ساز ایران‌زمین می‌گوییم:

**❋ دوستان عزیز! در زندگی یاد بگیرید روی اهدافتان تمرکز کنید و با تمرین کردن فراوان به این مهارت بزرگ دست یابید. آن زمان است که برنده و پیروز هستید. ❋**

**دپارتمان متوسطه دوم**

# فهرست مطالب

**عنوان** | **صفحه**

# بخش اول

## ریاضی (۱)

# فصل اول

## مجموعه، الگو و دنباله

**در سال‌های تحصیلی گذشته آموختیم:**

**مجموعه:**

**تعریف** به دسته یا گروهی از اشیاء، انسان‌ها، حیوانات، گل‌ها، اعداد و ... که دارای حداقل یک ویژگی مشترک باشند، مجموعه می‌گوییم. مانند مجموعه‌ی عددهای دو رقمی، مجموعه‌ی دانش‌آموزان یک کلاس، مجموعه‌ی گل‌های قرمز و ... .

**تعریف** به هریک از اعداد، اشیاء، حروف و ... که یک مجموعه را تشکیل می‌دهند، عضو مجموعه می‌گویند. عضوهای یک مجموعه را با «,» از هم جدا می‌کنند.

**نکته ۱**: عضوهای یک مجموعه را داخل دو آکولاد یعنی $\{\ \}$ قرار می‌دهیم. باید توجه داشته باشیم که نماد $\{\ \}$، با پرانتز $(\ )$ یا کروشه $[\ ]$ اشتباه گرفته نشود.

**نکته ۲**: برای نام‌گذاری مجموعه‌ها از حروف بزرگ انگلیسی استفاده می‌کنیم.

**مثال ۱**:

$A=\{۱,۲,۳,...,۱۰\}$ , $B=\{a,b,c,d,e,f\}$

$B=\{$حسین , مهدی , علی$\}$ , $D=\{$ث , ت , پ , ب , آ$\}$

**نکته ۳**: در نمایش مجموعه‌ها، ترتیب نوشتن عضوهای یک مجموعه مهم نیست و با جابه‌جایی عضوهای یک مجموعه، مجموعه‌ی جدیدی ساخته نمی‌شود. همچنین با تکرار عضوهای یک مجموعه، مجموعه‌ی جدیدی ساخته نمی‌شود. به‌عنوان مثال، مجموعه‌های $\{۲,۲,۵,۸,۵\}$، $\{۵,۲,۸\}$ و $\{۲,۵,۸\}$ با هم مساوی‌اند.

**مثال ۲**: تعداد عضوهای مجموعه‌ی $A=\left\{۴,۹,\frac{۱۲}{۳},۸\frac{۵}{۵},۲/۷\right\}$ را تعیین کنید.

**جواب** مجموعه‌ی $A$ با مجموعه‌ی $A=\{۴,۹,۲/۷\}$ مساوی است که تعداد عضوهای آن برابر با ۳ می‌باشد.

$\frac{۱۲}{۳}=۴$ , $۸\frac{۵}{۵}=۹$

**نکته ۴:** در ریاضیات، از مجموعه برای بیان و نمایش دسته‌ای از اشیای مشخص (عضویت این اشیاء در مجموعه کاملاً معین باشد) و متمایز (غیرتکراری) استفاده می‌کنند.

**نکته ۵:** تنها عبارت‌هایی می‌توانند یک مجموعه را تشکیل دهند که برای ما انسان‌ها به‌طور دقیق مشخص شده باشند. به‌عنوان مثال، عبارت «انسان‌های قدبلند» یک مجموعه را مشخص نمی‌کند. زیرا چنین انسان‌هایی به‌طور دقیق مشخص نشده‌اند و هر شخص نظر خاص خود را در مورد انسان‌های قدبلند دارد. برای برخی از انسان‌ها نیز نمی‌توانیم بگوییم که قدبلند هستند یا خیر.

**عضویت یک شیء در یک مجموعه:**

برای این‌که نشان دهیم عضوی متعلق به یک مجموعه است، از نماد $\in$ و برای این‌که نشان دهیم عضوی متعلق به یک مجموعه نیست، از نماد $\notin$ استفاده می‌کنیم.

**نکته ۶:** از نماد $\in$ یا $\notin$ زمانی استفاده می‌شود که سمت چپ این نمادها، عضو و سمت راست آن‌ها، مجموعه قرار داشته باشد.

**مثال ۳:** اگر داشته باشیم:

$$A=\{-۴,۱۰,a\} \qquad , \qquad B=\left\{۰,\frac{۳}{۸},۴/۳,t,w\right\}$$

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

$۱۰\in A$ $\square$ $\qquad$ $۴/۳\notin B$ $\square$ $\qquad$ $-۴\in B$ $\square$

$۰\notin A$ $\square$ $\qquad$ $t\in B$ $\square$ $\qquad$ $a\notin A$ $\square$

**جواب**

$۱۰\in A$ $\boxed{\checkmark}$ $\qquad$ $۴/۳\notin B$ $\boxed{\times}$ $\qquad$ $-۴\in B$ $\boxed{\times}$

$۰\notin A$ $\boxed{\checkmark}$ $\qquad$ $t\in B$ $\boxed{\checkmark}$ $\qquad$ $a\notin A$ $\boxed{\times}$

**انواع مجموعه‌ها:**

مجموعه‌ها به دو دسته تقسیم می‌شوند:

**الف) مجموعه‌های پایان‌پذیر:**

**تعریف** مجموعه‌ای که تعداد عضوهای آن مشخص و قابل شمارش باشد، مجموعه‌ی پایان‌پذیر نامیده می‌شود. مانند مجموعه‌ی $A=\{-۱,۴,۷,۱۲\}$ که تعداد عضوهای آن برابر با ۴ است.

**نکته ۷:** تعداد عضوهای مجموعه‌ی پایان‌پذیری مانند $A$ را با $n(A)$ نمایش می‌دهیم. به‌عنوان مثال، اگر مجموعه‌ی $A$ سه عضو داشته باشد، می‌نویسیم: $n(A)=۳$.

**ب) مجموعه‌های پایان‌ناپذیر:**

**تعریف** مجموعه‌ای که تعداد عضوهای آن نامشخص و غیرقابل شمارش باشد، مجموعه‌ی پایان‌ناپذیر نامیده می‌شود. مانند مجموعه‌ی $E=\{۲,۴,۶,...\}$ که مجموعه‌ی عددهای فرد را نشان می‌دهد و تعداد عضوهای آن نامشخص است.

**نکته ۸:** در برخی از مجموعه‌های پایان‌پذیر و پایان‌ناپذیر، برای خودداری کردن از نوشتن تمامی عضوهای مجموعه، از سه نقطه $(...)$ استفاده می‌کنیم. به‌عنوان مثال، مجموعه‌ی اعداد ۱ تا ۱۰۰ را که مجموعه‌ای پایان‌پذیر است، می‌توانیم به‌صورت $\{۱,۲,۳,...,۱۰۰\}$ و مجموعه‌ی مضرب‌های طبیعی عدد ۵ را که مجموعه‌ای پایان‌ناپذیر است، می‌توانیم به‌صورت $\{۵,۱۰,۱۵,۲۰,...\}$ نشان دهیم.

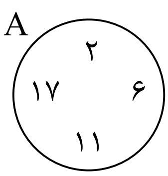
**نمایش مجموعه‌ها:**

برای نمایش یک مجموعه، سه روش وجود دارد:

**الف) نمایش مجموعه‌ها با نوشتن عضوها:** با فهرست کردن و نوشتن عضوهای یک مجموعه (و یا نوشتن تعدادی از عضوهای مجموعه‌های پایان‌پذیر که دارای نظم خاصی هستند) می‌توانیم آن مجموعه را نمایش دهیم. به‌عنوان مثال، مجموعه‌ی شمارنده‌های عدد ۲۴ را با نوشتن عضوها به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$\{۱,۲,۳,۴,۶,۸,۱۲,۲۴\}$

**ب) نمایش مجموعه‌ها با نمودار وِن:** یک مجموعه‌ی پایان‌پذیر را می‌توانیم با استفاده از منحنی‌ها یا خط‌های شکسته‌ی بسته نمایش دهیم. به‌عنوان مثال، مجموعه‌ی $A=\{۲,۶,۱۱,۱۷\}$ را با نمودار وِن، به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:



**ج) نمایش مجموعه‌ها با نمادهای ریاضی:** برای نمایش مجموعه‌ها با نمادهای ریاضی، کافی است رابطه‌ی مشترک بین عضوهای مجموعه را به‌صورت یک عبارت ریاضی بنویسیم. به‌عنوان مثال، مجموعه‌ی $B=\{۲,۵,۸,۱۱,...\}$ را با نمادهای ریاضی، به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$B=\{۳k-۱ \mid k\in\mathbb{N}\}$$

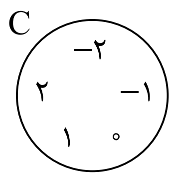
**مثال ۴:** مجموعه‌ی عددهای صحیح بین $-۳$ و $+۳$ را به سه صورت مختلف نمایش دهید و آن را $C$ بنامید.

**جواب**

**الف) نمایش با نوشتن عضوها:**

$$C=\{-۲,-۱,۰,۱,۲\}$$

**ب) نمایش با نمودار وِن:**




**ج) نمایش با نمادهای ریاضی:**

$$C=\{x\in\mathbb{Z} \mid -۳<x<۳\}$$

**مثال ۵:** مجموعه‌های زیر را با نمادهای ریاضی نمایش دهید.

الف) $A=\{۰,۱,۲,...,۱۳\}$

ب) $B=\{-۳۵,-۳۴,-۳۳,...\}$

ج) $C=\{۲,۱,۰,-۱,...\}$

د) $D=\{...,-۶,-۳,۰,۳,۶,...\}$

**جواب**

الف) $A=\{x\in\mathbb{W} \mid x<۱۴\}$ یا $A=\{x\in\mathbb{Z} \mid ۰\le x\le ۱۳\}$ یا $A=\{x\in\mathbb{Z} \mid -۱<x<۱۴\}$

ب) $B=\{x\in\mathbb{Z} \mid x\ge -۳۵\}$ یا $B=\{x\in\mathbb{Z} \mid x>-۳۶\}$

ج) $C=\{x\in\mathbb{Z} \mid x\le ۲\}$ یا $C=\{x\in\mathbb{Z} \mid x<۳\}$

د) $D=\{۳x \mid x\in\mathbb{Z}\}$

**مثال** ۶: مجموعه‌های زیر را با نوشتن عضوها نمایش دهید.

الف) $E=\{۵k-۲ \mid k\in\mathbb{N}\}$

ب) $F=\left\{\frac{۱}{k^{۲}+۱} \mid k\in\mathbb{Z},-۴\le k\le ۴\right\}$

ج) $G=\{۶+۴k \mid k\in\mathbb{W},k<۵\}$

د) $H=\left\{\frac{k-۱}{k+۱} \mid k\in\mathbb{Z},k>-۱\right\}$

**جواب**

الف) $E=\{۵(۱)-۲,۵(۲)-۲,۵(۳)-۲,۵(۴)-۲,\dots\}=\{۳,۸,۱۳,۱۸,\dots\}$

ب) $$F=\left\{\frac{۱}{(-۴)^{۲}+۱},\frac{۱}{(-۳)^{۲}+۱},\frac{۱}{(-۲)^{۲}+۱},\frac{۱}{(-۱)^{۲}+۱},\frac{۱}{(۰)^{۲}+۱},\frac{۱}{(۱)^{۲}+۱},\frac{۱}{(۲)^{۲}+۱},\frac{۱}{(۳)^{۲}+۱},\frac{۱}{(۴)^{۲}+۱}\right\}$$
$$=\left\{\frac{۱}{۱۷},\frac{۱}{۱۰},\frac{۱}{۵},\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۱},\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۵},\frac{۱}{۱۰},\frac{۱}{۱۷}\right\}=\left\{\frac{۱}{۱۷},\frac{۱}{۱۰},\frac{۱}{۵},\frac{۱}{۲},۱\right\}$$

ج) $G=\{۶+۴(۰),۶+۴(۱),۶+۴(۲),۶+۴(۳),۶+۴(۴)\}=\{۶,۱۰,۱۴,۱۸,۲۲\}$

د) $H=\left\{\frac{۰-۱}{۰+۱},\frac{۱-۱}{۱+۱},\frac{۲-۱}{۲+۱},\frac{۳-۱}{۳+۱},\dots\right\}=\left\{-۱,۰,\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۴},\dots\right\}$

**مجموعه‌های اعداد:**

**الف) مجموعه‌ی عددهای طبیعی:** این مجموعه، مجموعه‌ای پایان‌ناپذیر است که عضوهای آن از ۱ شروع می‌شود و تا بی‌نهایت ادامه دارد. مجموعه‌ی عددهای طبیعی را با $\mathbb{N}$ و به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم.

$\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,۴,\dots\}$

**نکته** ۹: مجموعه‌ی $E=\{۲,۴,۶,۸,\dots\}$، مجموعه‌ی عددهای طبیعی زوج است. این مجموعه را با نمادهای ریاضی به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$E=\{۲k \mid k\in\mathbb{N}\}$

**نکته** ۱۰: مجموعه‌ی $O=\{۱,۳,۵,۷,\dots\}$، مجموعه‌ی عددهای طبیعی فرد است. این مجموعه را با نمادهای ریاضی به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$O=\{۲k-۱ \mid k\in N\}$

**ب) مجموعه‌ی عددهای حسابی:** این مجموعه، مجموعه‌ای پایان‌ناپذیر است که عضوهای آن از صفر شروع می‌شود و تا بی‌نهایت ادامه دارد. مجموعه‌ی عددهای حسابی را با $\mathbb{W}$ یا $\mathbb{I}$ و به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$\mathbb{W}$ یا $\mathbb{I}=\{۰,۱,۲,۳,...\}$

**ج) مجموعه‌ی عددهای صحیح:** این مجموعه، مجموعه‌ای پایان‌ناپذیر است که عضوهای آن شامل عددهای مثبت، منفی و عدد صفر است. مجموعه‌ی عددهای صحیح را با $\mathbb{Z}$ و به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

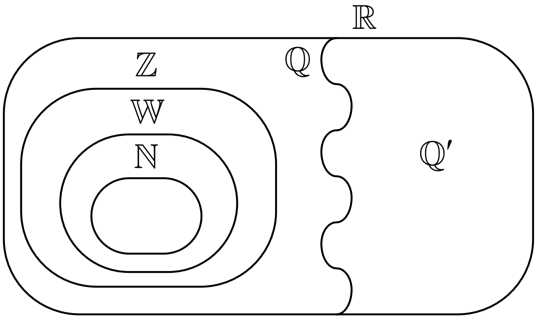
$$\mathbb{Z}=\{...,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,...\}$$

**د) مجموعه‌ی عددهای گویا:** این مجموعه، مجموعه‌ای پایان‌ناپذیر است. ازآنجاکه اولین عدد گویای بزرگ‌تر از هر عدد گویا مشخص نیست، لذا نمی‌توان این مجموعه را با عضوها مشخص کرد؛ به همین دلیل مجموعه‌ی عددهای گویا را با نمادهای ریاضی و به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b} \mid a,b\in\mathbb{Z}, b\neq ۰\right\}$$

**ه) مجموعه‌ی عددهای گنگ (اصم):** این مجموعه، مجموعه‌ای پایان‌ناپذیر است. عضوهای این مجموعه، عددهایی مانند $\sqrt{۲}$، $\sqrt{۵}$، ۰/۱۲۵۸... و $\pi$ هستند که تعداد رقم‌های اعشاری آن‌ها بی‌شمار است و دارای دوره‌ی تناوب نیستند. به‌طور کلی می‌توان گفت: جذر عددهایی که مجذور کامل نیستند، گنگ است. مجموعه‌ی عددهای گنگ را با $\mathbb{Q}'$ یا $\mathbb{Q}^c$ نمایش می‌دهند.

**و) مجموعه‌ی عددهای حقیقی:** این مجموعه، مجموعه‌ای پایان‌ناپذیر است و شامل عددهای گویا و عددهای گنگ است. مجموعه‌ی عددهای حقیقی را با $\mathbb{R}$ نمایش می‌دهند.




**مثال ۷:** مجموعه‌های زیر را روی محور نمایش دهید.

الف) $A=\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq ۲/۵\}$

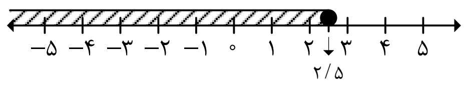
ب) $B=\{x\in\mathbb{R} \mid -۳\leq x<\sqrt{۲}\}$

ج) $C=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x>-\frac{۱۰}{۳}\right\}$

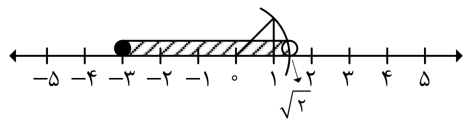
د) $D=\{x\in\mathbb{R} \mid ۴\geq x\}$

**جواب**

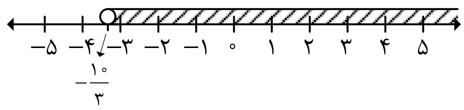
الف)



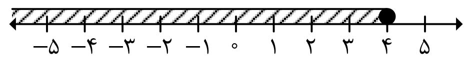
ب)



ج)



د)



## مجموعه‌ی تهی:

**تعریف** مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد، مجموعه‌ی تهی نامیده می‌شود و آن را با $\varnothing$ یا $\{\ \}$ نمایش می‌دهند.

**تذکر** **باید دقت داشته باشیم که مجموعه‌ی تهی با مجموعه‌های $\{\varnothing\}$ و $\{۰\}$ که هر کدام دارای یک عضو هستند، برابر نیست.**

## مجموعه‌های مساوی:

**تعریف** دو مجموعه‌ی $A$ و $B$ را مساوی گویند هرگاه هر عضو مجموعه‌ی $A$، عضوی از مجموعه‌ی $B$ و هر عضو مجموعه‌ی $B$، عضوی از مجموعه‌ی $A$ باشد. در این صورت می‌نویسیم: $A=B$.

**تذکر** **اگر عضوی در مجموعه‌ی $\mathbf{A}$ باشد که در مجموعه‌ی $\mathbf{B}$ نباشد و یا عضوی در مجموعه‌ی $\mathbf{B}$ باشد که در $\mathbf{A}$ نباشد، در این صورت مجموعه‌ی $\mathbf{B}$ با مجموعه‌ی $\mathbf{A}$ برابر نیست و می‌نویسیم: $\mathbf{A \neq B}$.**

**مثال** ۸: مقادیر $a$ و $b$ را چنان تعیین کنید که دو مجموعه‌ی $A=\{-۴,۵,۳a-۱\}$ و $B=\{-۲b,۱۱,۵\}$ با هم مساوی باشند.

**جواب** برای این‌که دو مجموعه‌ی $A$ و $B$ با هم مساوی باشند، باید داشته باشیم: $۳a-۱=۱۱$ و $-۲b=-۴$. پس داریم:

$$۳a-۱=۱۱ \Rightarrow ۳a=۱۱+۱ \Rightarrow ۳a=۱۲ \Rightarrow a=\frac{۱۲}{۳}=۴$$

$$-۲b=-۴ \Rightarrow b=\frac{-۴}{-۲}=۲$$

**زیرمجموعه:**

**تعریف** اگر هر عضو مجموعه‌ی $A$ عضوی از مجموعه‌ی $B$ باشد، می‌گوییم مجموعه‌ی $A$ زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی $B$ است و می‌نویسیم: $A \subseteq B$. به‌عنوان مثال، اگر داشته باشیم $E = \{۳,۴,۵\}$ و $F = \{۱,۲,...,۱۰\}$، در این صورت داریم: $H \subseteq F$.

**تذکر** **اگر حداقل یک عضو در مجموعه‌ی $A$ باشد که در مجموعه‌ی $B$ نباشد، می‌گوییم مجموعه‌ی $A$ زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی $B$ نیست و می‌نویسیم: $A \not\subseteq B$.**

**نکته** ۱۱: هر مجموعه، زیرمجموعه‌ی خودش است؛ یعنی اگر $A$ مجموعه‌ی دلخواهی باشد، در این صورت داریم:

$$A \subseteq A$$

**نکته** ۱۲: مجموعه‌ی تهی، زیرمجموعه‌ی هر مجموعه‌ی دلخواهی مانند $A$ است. به‌عبارت دیگر:

$$\varnothing \subseteq A$$

**نکته** ۱۳: از نمادهای $\subseteq$ یا $\not\subseteq$ زمانی استفاده می‌شود که در سمت راست و چپ این نمادها، مجموعه قرار داشته باشد؛ به‌عبارت دیگر، یکی از حروف بزرگ انگلیسی و یا علامت آکولاد که نشان‌دهنده‌ی مجموعه است، باشد.

**نکته** ۱۴: همواره داریم:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

**مثال** ۹: مجموعه‌ی $M = \{۱,۲,۳,...,۲۰\}$ را درنظر بگیرید:

الف) زیرمجموعه‌ای از $M$ بنویسید که عضوهای آن بر ۳ بخش‌پذیر باشند و آن را $A$ بنامید.

ب) زیرمجموعه‌ای از $M$ بنویسید که عضوهای آن مضرب ۴ باشند و آن را $B$ بنامید.

ج) زیرمجموعه‌ای از $M$ بنویسید که عضوهای آن مضرب ۱۲ باشند و آن را $C$ بنامید.

د) زیرمجموعه‌ای از $M$ بنویسید که عضوهای آن عدد اول باشند و آن را $D$ بنامید.

ه) در داخل $\square$ یکی از نمادهای $\in$، $\notin$، $\subseteq$ و $\not\subseteq$ را بگذارید.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $۱۷ \ \square \ D$ | $D \ \square \ M$ | $C \ \square \ B$ | $۱۶ \ \square \ A$ |
| $۱۴ \ \square \ B$ | $\{۸,۱۲\} \ \square \ C$ | $۱۵ \ \square \ M$ | $B \ \square \ D$ |

**جواب**

الف) $A=\{۳,۶,۹,۱۲,۱۵,۱۸\}$

ب) $B=\{۴,۸,۱۲,۱۶,۲۰\}$

ج) $C=\{۱۲\}$

د) $D=\{۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹\}$

ه)

| | | | |
|---|---|---|---|
| $۱۷ \ \boxed{\in} \ D$ | $D \ \boxed{\subseteq} \ M$ | $C \ \boxed{\subseteq} \ B$ | $۱۶ \ \boxed{\notin} \ A$ |
| $۱۴ \ \boxed{\notin} \ B$ | $\{۸,۱۲\} \ \boxed{\not\subseteq} \ C$ | $۱۵ \ \boxed{\in} \ M$ | $B \ \boxed{\not\subseteq} \ D$ |

**روش نوشتن تمام زیرمجموعه‌های یک مجموعه:**

برای نوشتن تمام زیرمجموعه‌های یک مجموعه، می‌توانیم با شروع از خود مجموعه و حذف تک‌تک عضوهای آن در همه‌ی حالت‌هایی که امکان‌پذیر است، تمام زیرمجموعه‌های آن مجموعه را بنویسیم.

**نکته ۱۵**: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $n$ عضوی، برابر با $۲^n$ است.

**مثال ۱۰**: مجموعه‌ی $A=\{-۲,۳,۸\}$ چند زیرمجموعه دارد؟ آن‌ها را بنویسید.

**جواب**

تعداد زیرمجموعه‌ها $= ۲^۳ = ۸$

زیرمجموعه‌های سه عضوی: $\{-۲,۳,۸\}$

زیرمجموعه‌های دو عضوی: $\{-۲,۳\},\{-۲,۸\},\{۳,۸\}$

زیرمجموعه‌های یک عضوی: $\{-۲\},\{۳\},\{۸\}$

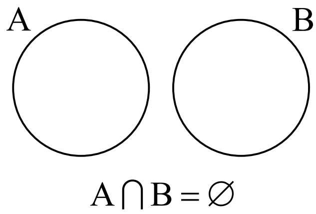
زیرمجموعه‌های هیچ عضوی: $\{\ \}$

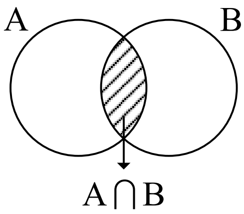
**اعمال روی مجموعه‌ها:**

**الف) اشتراک دو مجموعه:** مجموعه‌ی عضوهایی که به هر دو مجموعه‌ی $A$ و $B$ تعلق داشته باشند، اشتراک دو مجموعه‌ی $A$ و $B$ نامیده می‌شود که آن را با $A \cap B$ نمایش می‌دهند. این مجموعه را با نمادهای ریاضی به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\mathbf{A \cap B = \{x \mid x \in A \ , \ x \in B\}}$$

نمودار وِن اشتراک دو مجموعه‌ی $A$ و $B$ در دو حالت ممکن به‌صورت زیر است:

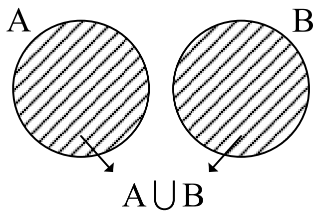


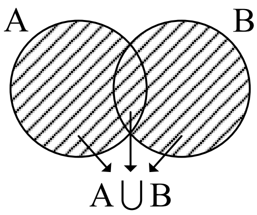




**ب) اجتماع دو مجموعه:** مجموعه‌ی عضوهایی که حداقل به یکی از دو مجموعه‌ی $A$ و $B$ تعلق داشته باشند، اجتماع دو مجموعه‌ی $A$ و $B$ نامیده می‌شود که آن را با $A \cup B$ نمایش می‌دهند. این مجموعه را با نمادهای ریاضی به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\mathbf{A \cup B = \{x \mid x \in A} \ \text{یا} \ \mathbf{x \in B\}}$$

نمودار وِن اجتماع دو مجموعه‌ی $A$ و $B$ در دو حالت ممکن به‌صورت زیر است:

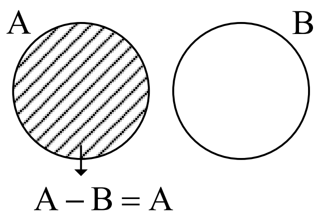


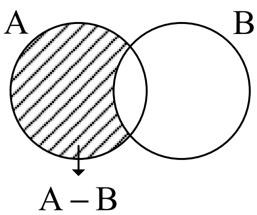




**ج) تفاضل دو مجموعه:** مجموعه‌ی $A - B$ ($A$ منهای $B$) مجموعه‌ی عضوهایی از مجموعه‌ی $A$ است که در مجموعه‌ی $B$ نمی‌باشد. این مجموعه را با نمادهای ریاضی به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\mathbf{A - B = \{x \mid x \in A \ , \ x \notin B\}}$$

نمودار وِن $A - B$ در دو حالت ممکن به‌صورت زیر است:




**نکته ۱۶:** برای هر دو مجموعه‌ی $A$ و $B$ داریم:

$$A - B \neq B - A \quad ; \quad A \neq B$$

**مثال ۱۱:** اگر داشته باشیم $A=\{۱,۲,...,۱۰\}$ و $B=\{۳,۶,۸,۹,۱۲,۱۵\}$، عضوهای مجموعه‌های $A\bigcup B$، $A\bigcap B$ و $A-B$ را بنویسید.

**جواب**

$$A\bigcup B=\{۱,۲,...,۱۰,۱۲,۱۵\}$$

$$A\bigcap B=\{۳,۶,۸,۹\}$$

$$A-B=\{۱,۲,۴,۵,۷,۱۰\}$$

**نکته ۱۷:** همواره داریم:

$$\mathbb{R}=\mathbb{Q}\bigcup\mathbb{Q}'$$

**مثال ۱۲:** طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

الف) $\mathbb{R}-\mathbb{Q}'=$

ب) $\mathbb{Q}\bigcap\mathbb{Q}'=$

ج) $\mathbb{Z}\bigcap\mathbb{N}=$

د) $\mathbb{W}\bigcup\mathbb{Q}=$

ه) $\mathbb{Q}\bigcup\mathbb{R}=$

و) $\mathbb{Z}-\mathbb{N}=$

**جواب**

الف) $\mathbb{R}-\mathbb{Q}'=\mathbb{Q}$

ب) $\mathbb{Q}\bigcap\mathbb{Q}'=\varnothing$

ج) $\mathbb{Z}\bigcap\mathbb{N}=\mathbb{N}$

د) $\mathbb{W}\bigcup\mathbb{Q}=\mathbb{Q}$

ه) $\mathbb{Q}\bigcup\mathbb{R}=\mathbb{R}$

و) $\mathbb{Z}-\mathbb{N}=\{...,-۲,-۱,۰\}$

**نکات مهم در مجموعه‌ها:**

**نکته ۱۸:** در اشتراک دو مجموعه همواره داریم:

۱) $\mathbf{A\bigcap B=B\bigcap A}$

۲) $\mathbf{A\bigcap A=A}$

۳) $\mathbf{A\bigcap\varnothing=\varnothing}$

**نکته ۱۹**: در اجتماع دو مجموعه همواره داریم:

۱) $A \cup B = B \cup A$

۲) $A \cup A = A$

۳) $A \cup \varnothing = A$

**نکته ۲۰**: در تفاضل دو مجموعه همواره داریم:

۱) $(A - B) \subseteq A$

۲) $(B - A) \subseteq B$

**نکته ۲۱**: همواره داریم:

۱) $(A \cap B) \subseteq A$

۲) $(A \cap B) \subseteq B$

۳) $(A \cap B) \subseteq (A \cup B)$

۴) $A \subseteq (A \cup B)$

۵) $B \subseteq (A \cup B)$

**الگو:**

در برخی مسئله‌ها، بین اعداد و شکل‌ها رابطه‌ی مشخصی وجود دارد. کشف این رابطه به حل مسئله و به‌دست آوردن جواب کمک می‌کند. یکی از روش‌هایی که در کشف رابطه به ما کمک می‌کند، الگویابی است.

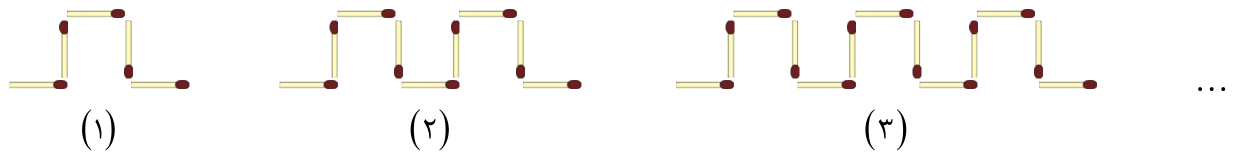
**انواع الگوها:**

الگوها بر دو نوع هستند:

**۱) الگوهای عددی** **۲) الگوهای هندسی**

به مثال زیر توجه کنید:

**مثال ۱۳**: با توجه به شکل‌های زیر، تعداد چوب‌کبریت‌ها را در شکل $n$ ام تعیین کنید. با توجه به الگوی به‌دست آمده، تعداد چوب‌کبریت‌های شکل دویستم را به‌دست آورید.




**جواب** تعداد چوب‌کبریت‌ها در هریک از شکل‌ها به‌صورت زیر است:

$$\underbrace{۵\ ,\ ۹}_{+۴}\ ,\ \underbrace{۱۳}_{+۴}\ ,\ \underbrace{۱۷}_{+۴}\ ,\ \dots$$

این اعداد را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم:

$$(۴\times۱)+۱\ ,\ (۴\times۲)+۱\ ,\ (۴\times۳)+۱\ ,\ (۴\times۴)+۱\ ,\ \dots$$

رابطه‌ی بین شماره‌ی شکل و تعداد چوب‌کبریت‌ها به‌صورت زیر است:

تعداد چوب‌کبریت‌ها $= (۴\times$ شماره‌ی شکل$)+۱$

بنابراین تعداد چوب‌کبریت‌ها در شکل $n$ ام برابر است با: $۴n+۱$.

اکنون با استفاده از رابطه‌ی به‌دست آمده داریم:

تعداد چوب‌کبریت‌های شکل دویستم $= (۴\times۲۰۰)+۱ = ۸۰۰+۱ = ۸۰۱$

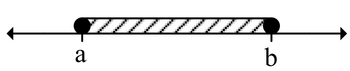
**در سال تحصیلی آینده خواهیم آموخت:**

**بازه‌ها:**

**تعریف** زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$ را که شامل تمام عددهای حقیقی بین دو عدد مشخص هستند، «بازه» یا «فاصله» می‌نامند.

برای نمایش مجموعه‌ی نقاط روی محور عددهای حقیقی، از نماد بازه (فاصله) استفاده می‌کنیم. در این صورت سه حالت مختلف به‌وجود می‌آید:

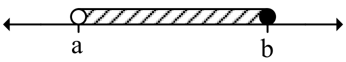
**الف) بازه‌ی بسته:** مجموعه‌ی $A=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x\le b\}$ را درنظر می‌گیریم. این مجموعه را با نمادهای ریاضی به‌صورت $[a,b]$ که **بازه‌ی بسته از a تا b** نامیده می‌شود، نشان می‌دهیم. این بازه‌ی بسته را روی محور عددهای حقیقی به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:



**ب) بازه‌ی باز:** مجموعه‌ی $A=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$ را درنظر می‌گیریم. این مجموعه را با نمادهای ریاضی به‌صورت $(a,b)$ که **بازه‌ی باز بین a و b** نامیده می‌شود، نشان می‌دهیم. این بازه‌ی باز را روی محور عددهای حقیقی به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:


**ج) نیم‌باز:** مجموعه‌ی $A=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x<b\}$ را درنظر می‌گیریم. این مجموعه را با نمادهای ریاضی به‌صورت $[a,b)$ که **نیم‌باز از راست** نامیده می‌شود، نشان می‌دهیم. این نیم‌بازه را روی محور عددهای حقیقی به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:


اکنون مجموعه‌ی $A=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\le b\}$ را درنظر می‌گیریم. این مجموعه را با نمادهای ریاضی به‌صورت $(a,b]$ که **نیم‌باز از چپ** نامیده می‌شود، نشان می‌دهیم. این نیم‌بازه را روی محور عددهای حقیقی به‌صورت زیر نمایش می‌دهیم:




**نکته ۲۲:** مجموعه‌ی عددهای حقیقی $\mathbb{R}$ را به‌صورت $(-\infty,+\infty)$ نیز نمایش می‌دهند. باید توجه داشته باشیم که $\infty$ (بی‌نهایت) عدد نیست، بلکه برای نمایش بی‌نهایت کوچک از $-\infty$ و برای نمایش بی‌نهایت بزرگ از $+\infty$ استفاده می‌کنند.

**نکته ۲۳:** بازه‌های $(a,+\infty)$ و $[a,+\infty)$ از سمت راست، نامحدود می‌باشند و بازه‌های $(-\infty,b)$ و $(-\infty,b]$ از سمت چپ، نامحدود می‌باشند.

**مثال ۱۴:** هریک از مجموعه‌های زیر را روی محور عددهای حقیقی نمایش دهید و به‌صورت بازه بنویسید.

الف) $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x<۳\}$

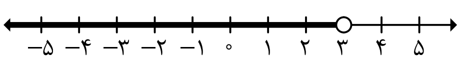
ب) $B=\{x\in\mathbb{R}\mid -۲\le x\le ۲\}$

ج) $C=\{x\in\mathbb{R}\mid -۵<x\le -۱\}$

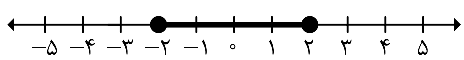
د) $D=\{x\in\mathbb{R}\mid x\ge -۴\}$

**جواب**

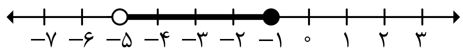
الف) $A=(-\infty,۳)$



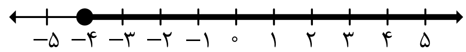

ب) $B=[-۲,۲]$



ج) $C=\left(-۵,-۱\right]$

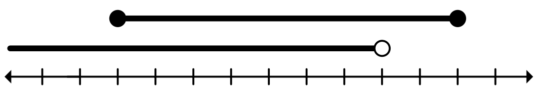


د) $D=\left[-۴,+\infty\right)$



**مثال ۱۵**: اجتماع و اشتراک دو بازه‌ی $\left[-۴,۵\right]$ و $\left(-\infty,۳\right)$ را به‌دست آورید.

**جواب**



$$\left[-۴,۵\right]\cup\left(-\infty,۳\right)=\left(-\infty,۵\right]$$
$$\left[-۴,۵\right]\cap\left(-\infty,۳\right)=\left[-۴,۳\right)$$

**مجموعه‌های متناهی و نامتناهی:**

**تعریف** مجموعه‌هایی را که تعداد عضوهای آن‌ها یک عدد حسابی است، مجموعه‌های متناهی می‌نامند.

**تذکر** **مجموعه‌های متناهی همان مجموعه‌های پایان‌پذیر هستند.**

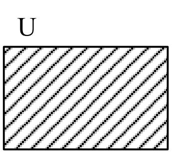
**تعریف** مجموعه‌هایی را که تعداد عضوهای آن‌ها از هر عددی که درنظر بگیریم بزرگ‌تر است (بی‌شمار عضو دارند)، مجموعه‌های نامتناهی می‌نامند.

**تذکر** **مجموعه‌های نامتناهی همان مجموعه‌های پایان‌ناپذیر هستند.**

**مجموعه‌ی مرجع:**

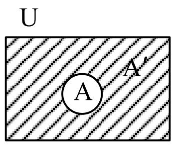
**تعریف** در هر مبحث، مجموعه‌ای را که همه‌ی مجموعه‌های مورد بحث زیرمجموعه‌های آن باشند، مجموعه‌ی مرجع می‌نامند و آن را با $U$ یا $M$ نمایش می‌دهند.

**تذکر** **مجموعه‌ی مرجع را با نمودار وِن، معمولاً به‌صورت یک مستطیل نمایش می‌دهند.**



**متمم یک مجموعه:**

**تعریف** هرگاه $U$ مجموعه‌ی مرجع باشد و $A \subseteq U$، آن‌گاه مجموعه‌ی $U - A$ را متمم $A$ می‌نامند و آن را با نماد $A'$ نشان می‌دهند. به‌عبارت دیگر، $A'$ شامل عضوهایی از $U$ است که در $A$ نیستند.




**نکته ۲۴**: اگر $A$ یک مجموعه‌ی دلخواه و $U$ مجموعه‌ی مرجع باشد، در این صورت داریم:

$$A \cap A' = \varnothing$$

**نکته ۲۵**: متممِ متممِ هر مجموعه، برابر با خود آن مجموعه است. یعنی:

$$(A')' = A$$

**نکته ۲۶**: همواره داریم:

$$U' = \varnothing$$
$$\varnothing' = U$$

**نکته ۲۷**: متمم‌های دو مجموعه‌ی مساوی، با هم مساوی‌اند.

**مثال ۱۶**: اگر $U = \{۱,۲,\ldots,۳۰\}$ مجموعه‌ی مرجع و $A$ مجموعه‌ی مضرب‌های عدد ۳ باشد و داشته باشیم $A \subseteq M$، مجموعه‌ی $A'$ را با نوشتن عضوها مشخص کنید.

**جواب**

$$A = \{۳,۶,۹,۱۲,۱۵,۱۸,۲۱,۲۴,۲۷,۳۰\}$$

$$B = \{۱,۲,۴,۵,۷,۸,۱۰,۱۱,۱۳,۱۴,۱۶,۱۷,۱۹,۲۰,۲۲,۲۳,۲۵,۲۶,۲۸,۲۹\}$$

**دو مجموعه‌ی جدا از هم:**

**تعریف** به دو مجموعه‌ی ناتهی مانند $A$ و $B$ که عضو مشترکی نداشته باشند، دو مجموعه‌ی جدا از هم (مجزا) می‌گویند. مانند:

$A$ و $B$ دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند. $\Rightarrow$ $A \neq \varnothing , B \neq \varnothing , A \cap B = \varnothing$

به‌عنوان مثال، دو مجموعه‌ی $A = \{۱,۲\}$ و $B = \{۳,۴\}$ جدا از هم هستند. زیرا: $A \cap B = \varnothing$.

**تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه:**

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$$

**تذکر** **اگر $A \cap B = \varnothing$، در این صورت در رابطه‌ی بالا خواهیم داشت:**

$$\mathbf{n(A \cap B) = ۰}$$

**مثال** ۱۷: اگر داشته باشیم $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -۳ \leq x \leq ۴\}$ و $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < ۷\}$، مطلوب است تعیین $n(A \cup B)$.

**جواب**

$$A = \{-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,۴\} \Rightarrow n(A) = ۸$$

$$B = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} \Rightarrow n(B) = ۶$$

$$A \cap B = \{۱,۲,۳,۴\} \Rightarrow n(A \cap B) = ۴$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = ۸ + ۶ - ۴ = ۱۰$$

**الگوهای خطی:**

**تعریف** به‌طور کلی الگوهایی را که جمله‌ی عمومی آن‌ها به‌صورت $t_n = an + b$ است، الگوهای خطی می‌نامیم که در آن $a$ و $b$ عددهای حقیقی دلخواه و ثابت هستند.

**مثال** ۱۸: در یک الگوی خطی، جملات سوم و هشتم به‌ترتیب برابر با ۱۷ و ۵۲ است. جمله‌ی عمومی الگو را بیابید.

**جواب**

$$t_۳ = ۱۷ \Rightarrow a(۳) + b = ۱۷ \Rightarrow ۳a + b = ۱۷ \quad (۱)$$

$$t_۸ = ۵۲ \Rightarrow a(۸) + b = ۵۲ \Rightarrow ۸a + b = ۵۲ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \begin{cases} ۳a+b=۱۷ \\ ۸a+b=۵۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۳a\cancel{-b}=-۱۷ \\ ۸a\cancel{+b}=۵۲ \end{cases}$$

$$۵a=۳۵ \Rightarrow a=۷ \quad (*)$$

$$۳a+b=۱۷ \overset{(*)}{\Rightarrow} ۳(۷)+b=۱۷ \Rightarrow ۲۱+b=۱۷ \Rightarrow b=-۴$$

با قرار دادن مقدارهای $a$ و $b$ در $t_n=an+b$، جمله‌ی عمومی الگو به‌دست می‌آید. به‌عبارت دیگر:

$$t_n=an+b \xrightarrow{a=۷\,,\,b=-۴} t_n=۷n-۴$$

**دنباله:**

**تعریف** هر تعداد عدد را که پشت سر هم قرار می‌گیرند، یک دنباله می‌نامند. این اعداد، جملات دنباله نامیده می‌شوند.

**تذکر** **ممکن است جملات دنباله فاقد الگو باشند.**

**جمله‌ی عمومی دنباله:**

**تعریف** جمله‌ی $n$ام یک دنباله را جمله‌ی عمومی دنباله می‌نامند. جمله‌ی عمومی یک دنباله را معمولاً با $t_n$ یا $a_n$ یا $u_n$ نمایش می‌دهند.

**مثال ۱۹**: پنج جمله‌ی اول هریک از دنباله‌های زیر را که جمله‌ی عمومی آن‌ها داده شده است، بنویسید.

الف) $a_n=۲n-۵n^۲$

ب) $t_n=\dfrac{n+۳}{۲n-۱}$

**جواب**

الف)

$$\left.\begin{aligned} a_۱&=۲(۱)-۵(۱)^۲=-۳ \\ a_۲&=۲(۲)-۵(۲)^۲=-۱۶ \\ a_۳&=۲(۳)-۵(۳)^۲=-۳۹ \\ a_۴&=۲(۴)-۵(۴)^۲=-۷۲ \\ a_۵&=۲(۵)-۵(۵)^۲=-۱۱۵ \end{aligned}\right\} \Rightarrow -۳,-۱۶,-۳۹,-۷۲,-۱۱۵$$

ب)

$$\left.\begin{array}{l} t_{۱}=\dfrac{۱+۳}{۲(۱)-۱}=\dfrac{۴}{۱}=۴ \\ t_{۲}=\dfrac{۲+۳}{۲(۲)-۱}=\dfrac{۵}{۳} \\ t_{۳}=\dfrac{۳+۳}{۲(۳)-۱}=\dfrac{۶}{۵} \\ t_{۴}=\dfrac{۴+۳}{۲(۴)-۱}=\dfrac{۷}{۷}=۱ \\ t_{۵}=\dfrac{۵+۳}{۲(۵)-۱}=\dfrac{۸}{۹} \end{array}\right\} \Rightarrow ۴,\dfrac{۵}{۳},\dfrac{۶}{۵},۱,\dfrac{۸}{۹}$$

**دنباله‌ی حسابی:**

**تعریف** دنباله‌ای که هر جمله‌ی آن (به‌جز جمله‌ی اول) از اضافه شدن مقداری ثابت به جمله‌ی قبلی به‌دست می‌آید، دنباله‌ی حسابی نامیده می‌شود. این مقدار ثابت را قدرنسبت جملات دنباله‌ی حسابی می‌نامند.

اگر جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی را با $t_{۱}$، قدرنسبت را با $d$ و تعداد جملات را با $n$ نمایش دهیم، جمله‌ی عمومی دنباله به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{t_n = a_{۱} + (n-۱)d}$$

**مثال ۲۰:** اگر جمله‌ی دوم یک دنباله‌ی حسابی ۸ و جمله‌ی دوازدهم آن ۴۲− باشد، جمله‌ی عمومی دنباله را به‌دست آورید.

**جواب**

$$t_{۲}=۸ \Rightarrow t_{۱}+(۲-۱)d=۸ \Rightarrow t_{۱}+d=۸ \quad (۱)$$

$$t_{۱۲}=-۴۲ \Rightarrow t_{۱}+(۱۲-۱)d=-۴۲ \Rightarrow t_{۱}+۱۱d=-۴۲ \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \begin{cases} t_{۱}+d=۸ \\ t_{۱}+۱۱d=-۴۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{-t_{۱}}-d=-۸ \\ \cancel{t_{۱}}+۱۱d=-۴۲ \end{cases}$$

$$۱۰d=-۵۰ \Rightarrow d=-۵ \quad (*)$$

$$t_{۱}+d=۸ \overset{(*)}{\Rightarrow} t_{۱}+(-۵)=۸ \Rightarrow t_{۱}=۱۳ \quad (**)$$

$$t_n=t_{۱}+(n-۱)d \xrightarrow{(*),(**)} t_n=۱۳+(n-۱)(-۵) \Rightarrow t_n=-۵n+۱۸$$

## دنباله‌ی هندسی:

**تعریف** دنباله‌ای که هر جمله‌ی آن (به‌جز جمله‌ی اول) با ضرب یک عدد ثابت مخالف صفر در جمله‌ی قبلی به‌دست می‌آید، دنباله‌ی هندسی نامیده می‌شود. این مقدار ثابت را قدرنسبت جملات دنباله‌ی هندسی می‌نامند.

اگر جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی را با $t_1$، قدرنسبت را با $r$ و تعداد جملات را با $n$ نمایش دهیم، جمله‌ی عمومی دنباله به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\mathbf{t_n = t_1 r^{n-1}}$$

**مثال ۲۱**: جملات سوم و پنجم یک دنباله‌ی هندسی به ترتیب ۲ و ۸ می‌باشند. دنباله را مشخص کنید.

**جواب**

$$t_3 = 2 \Rightarrow t_1 r^{3-1} = 2 \Rightarrow t_1 r^2 = 2 \quad (1)$$

$$t_5 = 8 \Rightarrow t_1 r^{5-1} = 8 \Rightarrow t_1 r^4 = 8 \quad (2)$$

رابطه‌ی $(2)$ را بر رابطه‌ی $(1)$ تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{\cancel{t_1} r^4}{\cancel{t_1} r^2} = \frac{8}{2} \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = \pm 2 \quad (*)$$

$$t_1 r^2 = 2 \Rightarrow t_1 (\pm 2)^2 = 2 \Rightarrow 4t_1 = 2 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2}$$

اگر $r = 2$، آن‌گاه دنباله به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{1}{2}, 1, 2, 4, \ldots$$

اگر $r = -2$، آن‌گاه دنباله به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{1}{2}, -1, 2, -4, \ldots$$

**توجه** **شرح کامل مطالب این فصل در کتاب جامع ریاضی (۱) پایه دهم بیان شده است.**

تمرین

۱ـ متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف) مجموعه‌ی عددهای اول

ب) مجموعه‌ی عددهای اعشاری بین ۰/۱ و ۰/۳

ج) مجموعه‌ی عددهای طبیعی دویست رقمی

---

۲ـ اگر داشته باشیم $A=\{x\in\mathbb{N} \mid ۱\le x\le ۹\}$، $B=\{۲,۴,۶,۷,۸\}$ و $C=\{۱,۳,۵,۶,۸\}$، مجموعه‌ی $(A\cup B)-(A\cap C)$ را با عضوها مشخص کنید.

---

۳ـ اگر $M=\{۴k \mid k\in\mathbb{N}\}$ مجموعه‌ی مرجع باشد و داشته باشیم $A=\{۸k \mid k\in\mathbb{N}\}$، مجموعه‌ی $A'$ را با نوشتن عضوها و علائم ریاضی مشخص کنید.

---

۴ـ جمله‌ی پنجم یک دنباله‌ی حسابی ۱ و جمله‌ی دوازدهم آن ۱۵ است. جمله‌ی عمومی این دنباله را به‌دست آورید.

---

۵ـ اگر یکی از جمله‌های یک دنباله‌ی هندسی ۳ و جمله‌ی بعدی ۴ باشد، دو جمله‌ی قبل از ۳ را تعیین کنید.

**توجه** **دانش‌آموزان عزیز، برای حل تمرین‌های بیش‌تر می‌توانید به کتاب «تفکر، تمرین، تسلط» مراجعه نمایید.**