بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضی پایه هشتم دوره اول متوسطه
پیشرفته

تألیف: دپارتمان متوسطه اول مؤسسه کانون ریاضیدانان زمان
نظارت عالی: علی خزایی

عنوان و نام پدیدآور : ریاضی پایه هشتم دوره اول متوسطه پیشرفته
وضعیت ویراست : [ویراست ۲].
مشخصات نشر : تهران: مؤسسه کانون ریاضیدانان زمان، ۱۳۹۶.
مشخصات ظاهری : ۱۸۱ص جدول، نمودار.؛ ۲۹×۲۲ س‌م.
شابک : 978-600-7903-96-4
وضعیت فهرست نویسی : فیپای مختصر
یادداشت : چاپ دوم.
شناسه افزوده : خزائی، علی، ۱۳۴۸ - ، ناظر
شناسه افزوده : کانون ریاضیدانان زمان
شماره کتابشناسی ملی : ۴۸۳۹۸۰۸

نام کتاب: ریاضی پایه هشتم دوره اول متوسطه پیشرفته
تألیف: دپارتمان متوسطه اول مؤسسه کانون ریاضیدانان زمان
شابک: ۴ـ۹۶ـ۷۹۰۳ـ۶۰۰ـ۹۷۸
ISBN:978-600-7903-96-4
نوبت چاپ: چاپ دوم ـ ویراست جدید ـ ۱۳۹۶
تیراژ: ۱۰۰۰ جلد

تعداد صفحات: ۱۸۱ صفحه
قیمت: ۲۶۰۰۰ تومان

ناشر: موسسه کانون ریاضیدانان زمان - تلفن مرکز پخش: ۷۵ ۵۵ ۹۵ ۸۸ (۰۲۱)
فروشگاه دائمی: تهران - میدان انقلاب - خیابان کارگر شمالی – نرسیده به بلوار کشاورز - پلاک ۱۵۴۷ - طبقه دوم - واحد ۳۳

پیش‌گفتار

گستردگی و تعمیق دانش ریاضی از سویی و کاربرد وسیع آن در سایر علوم به حدی است که این علم مادر همه علوم لقب گرفته است. وسعت کاربرد این دانش در علوم مختلف از جمله علوم مهندسی، علوم کشاورزی، علوم انسانی، علوم پزشکی، علوم کامپیوتر و ... بر اهمیت فراگیری آن از سوی دانش‌آموزان، دانش‌پژوهان و دانشجویان می‌افزاید. البته یادگیری ریاضیات را می‌توان به دو منظور خلاصه کرد. ضمن تحقق اهداف کاربردی آن و رفع نیازهای زندگی روزمره، باعث پرورش توانایی‌های ذهنی، تقویت قدرت تفکر منطقی، ایجاد و تقویت نظام فکری، افزایش قدرت طبقه‌بندی مفاهیم و آموخته‌های علمی و خلاصه تقویت قدرت برنامه‌ریزی در همه‌ی امور می‌گردد.

یکی از ابزارهای قدرتمند برای تفهیم مفاهیم ریاضیات، استفاده از منابع آموزشی کمک درسی با نگاهی جدید می‌باشد. کانون ریاضیدانان زمان به‌عنوان جامع‌ترین مرکز تخصصی آموزش، نشر و گسترش علم ریاضی، و با هدف ایجاد علاقه نسبت به درس ریاضی برای عموم و با ارائه‌ی روش‌های نوین آموزشی، اقدام به تألیف و چاپ ۸ عنوان کتاب کمک درسی در کلیه‌ی مقاطع تحصیلی نموده است. عناوین و توضیحات این کتاب‌ها به شرح زیر است:

۱) **مجموعه کتاب‌های تابستانه:** این کتاب‌ها در کلیه‌ی مقاطع تحصیلی تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها در قالب درسنامه‌ی مختصر ولی بسیار مفید و آموزنده به همراه نکات کلیدی، با رویکرد مروری بر گذشته و چشم‌اندازی به آینده (بخشی مربوط به مطالب سال‌های تحصیلی گذشته و بخشی نیز مربوط به سال تحصیلی آینده) است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در فصل تابستان مطالعه شوند.

۲) **مجموعه کتاب‌های مقدماتی:** این کتاب‌ها در مقاطع ابتدایی و متوسطه اول (راهنمایی) تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها در قالب درسنامه‌ی بسیار کامل همراه با آموزش دقیق مفاهیم ریاضی در سطح مقدماتی براساس مطالب کتاب‌های درسی آموزش و پرورش، ارائه‌ی مثال‌های متنوع همراه با پاسخ تشریحی، ارائه‌ی نکات مهم و کلیدی در جهت تکمیل مطالب و تمرین‌های بدون پاسخ پایان هر فصل است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در طول سال تحصیلی و همراه با کتاب درسی مطالعه شوند.

۳) **مجموعه کتاب‌های پیشرفته:** این کتاب‌ها در مقاطع ابتدایی و متوسطه اول (راهنمایی) تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها در قالب درسنامه‌ی بسیار کامل همراه با آموزش دقیق مفاهیم ریاضی در سطح پیشرفته و گسترده در ادامه‌ی مطالب کتاب‌های مقدماتی، ارائه‌ی مثال‌های متنوع همراه با پاسخ تشریحی، ارائه‌ی نکات مهم و کلیدی در جهت تکمیل مطالب و تمرین‌های بدون پاسخ پایان هر فصل است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در طول سال تحصیلی و همراه با کتاب درسی و کتاب مقدماتی مطالعه شوند.

۴) **مجموعه کتاب‌های جامع:** این کتاب‌ها در مقطع متوسطه دوم (دبیرستان) تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها در قالب درسنامه‌ی بسیار کامل همراه با آموزش دقیق مفاهیم ریاضی از سطح مقدماتی تا سطح پیشرفته براساس مطالب کتاب‌های درسی آموزش و پرورش، ارائه‌ی مثال‌های متنوع از سطح مقدماتی تا سطح پیشرفته همراه با پاسخ تشریحی، ارائه‌ی نکات مهم و کلیدی در جهت تکمیل مطالب، سؤالات تشریحی بدون پاسخ و سؤالات چهارگزینه‌ای همراه با پاسخ کلیدی و شگفتی‌های ریاضی در پایان هر فصل است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در طول سال تحصیلی و همراه با کتاب درسی مطالعه شوند.

۵) مجموعه کتاب‌های تیزهوشان: این کتاب‌ها در مقاطع ابتدایی و متوسطه اول (راهنمایی) جهت آمادگی دانش‌آموزان پایه‌ی ششم ابتدایی و پایه‌ی نهم متوسطه اول (راهنمایی) برای آزمون ورودی مدارس تیزهوشان، نمونه دولتی و برتر کشور در قالب درسنامه‌ی تستی همراه با نکات کلیدی و کاربردی در حل تست‌ها و سؤالات چهارگزینه‌ای با عنوان سنجش و ارزشیابی (۱) و (۲) به تألیف و چاپ رسیده‌اند. مطالعه‌ی این کتاب‌ها به دانش‌آموزان پایه‌های پنجم و ششم در مقطع ابتدایی و دانش‌آموزان پایه‌های هشتم و نهم در مقطع متوسطه اول (راهنمایی) پیشنهاد می‌گردد.

۶) مجموعه کتاب‌های موضوعی: این کتاب‌ها بیش‌تر جنبه‌ی تخصصی مباحث ریاضی مقطع متوسطه دوم (دبیرستان) را دارند و شامل درسنامه‌ی کامل، ارائه‌ی مثال‌های متنوع همراه با پاسخ تشریحی، نکات مهم و کاربردی در جهت تکمیل مطالب و تمرین‌های بدون پاسخ پایان هر فصل می‌باشند. این کتاب‌ها اطلاعات دانش‌آموزان را در مباحث مختلف ریاضی مقطع دبیرستان افزایش می‌دهند و باعث تقویت علمی آن‌ها در درس ریاضی و رفع ضعف‌های آن‌ها می‌شوند.

۷) مجموعه کتاب‌های یکی من، یکی تو: این کتاب‌ها در کلیه‌ی مقاطع تحصیلی تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها به این صورت است که یک سؤال همراه با روش حل (یکی من) توسط مؤلف طراحی شده و به دنبال آن، یک سؤال بدون حل (یکی تو) به دانش‌آموز واگذار شده است. سؤالات «یکی من» و «یکی تو» تقریباً مشابه یک‌دیگر هستند و طراحی آن‌ها کاملاً هوشمندانه و هدفمند است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در طول سال تحصیلی و به ویژه در ایام امتحانات مطالعه شوند.

۸) مجموعه کتاب‌های «تفکر، تمرین، تسلط»: این کتاب‌ها در کلیه‌ی مقاطع تحصیلی تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها به این صورت است که هر فصل از کتاب شامل سه بخش تفکر، تمرین و تسلط می‌باشد. در بخش «تفکر» مفاهیم مورد نیاز فصل و همچنین انتظاراتی که از دانش‌آموز می‌رود، به‌صورت مختصر و مفید بیان شده است؛ در بخش «تمرین» نمونه سؤالات امتحانی متنوعی در دو سطح مقدماتی و پیشرفته در اختیار دانش‌آموز قرار می‌گیرد و در بخش «تسلط» جهت سنجش و ارزشیابی دانش‌آموز، آزمونی از آن فصل به عمل می‌آید. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها همراه با کتاب‌های مقدماتی و پیشرفته مطالعه شوند.

امید است معلمین و مدرسین گرامی و همچنین دانش‌آموزان، دانش‌پژوهان و دانشجویان عزیز، پس از مطالعه‌ی کتاب‌های کانون، نظرات و پیشنهادات خود را منعکس نموده و ما را در ادامه‌ی راه یاری نمایند.

کانون ریاضیدانان زمان

مرکز تخصصی آموزش، نشر و گسترش فرهنگ ریاضی

مقدمه

«به نام نامی آفریننده نظام هستی»

حضرت علی (ع):

دانشی که قرین فهم نباشد، نفعی ندارد. خواندنی که توأم با تأمل نباشد، سودمند نیست. عبادتی که بی تفکر باشد، خیری ندارد.

خداوند بزرگ را سپاس می‌گویم که نعمت اندیشیدن را به همگان عطا فرمود تا در پرتو آن، انسان مسیر صحیح زیستن را آموخته و به دیگران نیز بیاموزد.

یکی از راهبردهای مهم یادگیری، آموزش دقیق مفاهیم و انجام تمرین‌های متناسب با اصول یادگیری و تکرار آن است. در این راستا، داشتن منبع مناسب برای یادگیری و درک بیش‌تر و همچنین نمونه سؤالات مناسب و متنوع برای تمرین، می‌تواند یکی از عوامل مهم موفقیت در یادگیری و پیشرفت علمی دانش‌آموزان باشد.

کتابی که در مقابل چشمان جستجوگر شما قرار دارد، بر مبنای نظام آموزشی کانون ریاضیدانان زمان و در جهت تکمیل کتاب‌های زنجیروار آن (تابستانه ← مقدماتی ← پیشرفته) که متناسب با مفاهیم و مطالب کتاب درسی ریاضی پایه هشتم دوره اول متوسطه است، همراه با آموزش دقیق مفاهیم ریاضی به شرح زیر گردآوری شده است:

❋ تدریس در سطح پیشرفته با روشی کلاسیک و دسته‌بندی و تشریح کامل مطالب

❋ ارائه‌ی نکات مهم و کلیدی در جهت تکمیل مطالب

❋ ارائه‌ی مثال‌های متنوع همراه با پاسخ تشریحی

❋ تمرین‌های پایان هر فصل

دپارتمان متوسطه اول

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

سیمای فصل اول

- **عددهای صحیح و گویا**
  - حل مسائل مهم عددهای صحیح
  - مجموع دنباله‌ی عددهای صحیح با فاصله‌های مساوی
  - عمل دوتایی در عددهای صحیح
  - حل برخی مسائل مهم عددهای گویا
  - روش‌های یافتن چند عدد گویا بین دو عدد گویا
    - روش هم‌مخرج کردن دو عدد گویا
    - روش مجموع صورت‌ها و مخرج‌های دو عدد گویا
    - روش میانگین دو عدد گویا
  - کسرهای تلسکوپی
  - کسرهای مسلسل
  - کسرهای تحویل‌ناپذیر
    - انواع کسرهای تحویل‌ناپذیر و تبدیل آن‌ها به عدد اعشاری
      - نماد اعشاری تحقیقی مختوم
      - نماد اعشاری متناوب
        - نماد اعشاری متناوب ساده
        - نماد اعشاری متناوب مرکب
  - نمایش کسری عددهای اعشاری
    - تبدیل عدد اعشاری تحقیقی مختوم به عدد گویا
    - تبدیل عدد اعشاری متناوب ساده به عدد گویا
    - تبدیل عدد اعشاری متناوب مرکب به عدد گویا
  - تمرین‌های فصل اول

در کتاب مقدماتی، با مطالب مربوط به این فصل آشنا شدیم. اکنون در ادامه‌ی آن مطالب و در سطح پیشرفته‌تر، به حل مثال‌های مهم و بیان مفاهیم جدیدی می‌پردازیم:

حل مسائل مهم عددهای صحیح:

نکته ۱: روی محور عددهای صحیح، قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به نقطه‌ی B، نقطه‌ی $2B-A$ است.

مثال ۱: قرینه‌ی نقطه‌ی ۳۰− نسبت به نقطه‌ی ۴−، چه نقطه‌ای است؟

جواب با توجه به نکته۱ داریم:

$$2\times(-4)-(-30)=-8+30=22$$

نکته ۲: اگر مجموع و اختلاف دو عدد را داشته باشیم و بخواهیم هریک از دو عدد را به‌دست آوریم، می‌توانیم از رابطه‌های زیر استفاده کنیم:

$$\text{عدد بزرگ‌تر}=\frac{\text{مجموع}+\text{اختلاف}}{2}$$

$$\text{عدد کوچک‌تر}=\frac{\text{مجموع}-\text{اختلاف}}{2}$$

مثال ۲: مجموع دو عدد برابر ۱۲− و اختلاف آن‌ها برابر ۳۶ است. آن دو عدد را بیابید.

جواب

$$\text{عدد بزرگ‌تر}=\frac{-12+36}{2}=\frac{24}{2}=12$$

$$\text{عدد کوچک‌تر}=\frac{-12-36}{2}=\frac{-48}{2}=-24$$

مثال ۳: میانگین چهار عدد صحیح برابر ۱۲− است. چه عددی به آن‌ها اضافه کنیم تا میانگین عددهای حاصل برابر ۱۰ شود؟

جواب می‌دانیم:

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع}}{\text{تعداد}} \Rightarrow \text{مجموع} = \text{میانگین} \times \text{تعداد}$$

بنابراین داریم:

$$\text{مجموع چهار عدد} = \left(-۱۲\right) \times ۴ = -۴۸$$

$$\text{مجموع پنج عدد} = ۱۰ \times ۵ = ۵۰$$

$$\text{عدد پنجم} = ۵۰ - \left(-۴۸\right) = ۵۰ + ۴۸ = ۹۸$$

مثال ۴: مجموع دو عدد A و B برابر ۱۰−، مجموع دو عدد B و C برابر ۱۲− و مجموع دو عدد A و C برابر ۸− است. میانگین این سه عدد را حساب کنید.

جواب

$$\begin{cases} A + B = -۱۰ \\ B + C = -۱۲ \\ A + C = -۸ \end{cases}$$

$$۲A + ۲B + ۲C = -۳۰ \Rightarrow A + B + C = \left(-۳۰\right) \div ۲ = -۱۵ \quad \text{مجموع سه عدد}$$

$$\Rightarrow \left(-۱۵\right) \div ۳ = -۵ \quad \text{میانگین سه عدد}$$

مثال ۵: حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$۲۱ - ۲۴ + ۲۵ - ۲۸ + ۲۹ - ۳۲ + \dots + ۱۰۱ - ۱۰۴ =$$

جواب

$$\underbrace{\left(۲۱ - ۲۴\right)}_{-۳} + \underbrace{\left(۲۵ - ۲۸\right)}_{-۳} + \underbrace{\left(۲۹ - ۳۲\right)}_{-۳} + \dots + \underbrace{\left(۱۰۱ - ۱۰۴\right)}_{-۳} = \underbrace{\left(-۳\right) + \left(-۳\right) + \left(-۳\right) + \dots + \left(-۳\right)}_{\text{۲۱ تا}} =$$

$$۲۱ \times \left(-۳\right) = -۶۳$$

مجموع دنباله‌ی عددهای صحیح با فاصله‌های مساوی:

دنباله‌ی عددهای صحیح با فاصله‌های مساوی، دنباله‌ای از اعداد هستند که بین هر دو عدد متوالی، فاصله‌ی ثابتی وجود دارد (تفاضل هر عدد از عدد قبلی، مقدار ثابتی است) و با نظم مشخصی، دنباله‌ی اعداد بزرگ‌تر و یا کوچک‌تر می‌شوند. به‌عنوان مثال، در دنباله‌ی زیر، عددها در حال بزرگ شدن هستند و فاصله‌ی بین هر دو عدد متوالی، برابر ۴ است:

$$۱۰, ۱۴, ۱۸, ۲۲, \dots$$

برای به‌دست آوردن مجموع این‌گونه از دنباله‌های اعداد، از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\text{مجموع دنباله‌ی اعداد} = \frac{(\text{عدد آخر} + \text{عدد اول}) \times \text{تعداد اعداد}}{۲}$$

در این رابطه، تعداد اعداد از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\text{تعداد اعداد} = \frac{\text{عدد اول} - \text{عدد آخر}}{\text{فاصله‌ی بین دو عدد متوالی}} + ۱$$

مثال ۶: حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$k = ۱۲ + ۱۵ + ۱۸ + \dots + ۶۲۴$$

جواب

$$\text{تعداد اعداد} = \frac{۶۲۴ - ۱۲}{۳} + ۱ = \frac{۶۱۲}{۳} + ۱ = ۲۰۴ + ۱ = ۲۰۵$$

$$k = \frac{۲۰۵ \times (۱۲ + ۶۲۴)}{۲} = \frac{۲۰۵ \times \cancelto{۳۱۸}{۶۳۶}}{\cancelto{۱}{۲}} = ۶۵۱۹۰$$

مثال ۷: مجموع مضرب‌های عدد ۷ کم‌تر از ۵۰۰ را حساب کنید.

جواب باید حاصل عبارت مقابل را به‌دست آوریم: $۷ + ۱۴ + ۲۱ + \dots + ۴۹۷ =$

بدین منظور داریم:

$$\text{تعداد اعداد} = \frac{۴۹۷ - ۷}{۷} + ۱ = \frac{۴۹۰}{۷} + ۱ = ۷۰ + ۱ = ۷۱$$

$$\text{مجموع دنباله‌ی اعداد} = \frac{۷۱ \times (۷ + ۴۹۷)}{۲} = \frac{۷ \times \cancelto{۲۵۲}{۵۰۴}}{\cancelto{۱}{۲}} = ۱۷۸۹۲$$

مثال ۸: حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$A = -۶ - ۱۲ - ۱۸ - \dots - ۷۵۶$$

جواب عبارت A را با استفاده از تبدیل تفریق به جمع، به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$A = (-۶) + (-۱۲) + (-۱۸) + \dots + (-۷۵۶)$$

در عبارت A، عددها در حال کوچک شدن هستند و فاصله‌ی هر دو عدد متوالی برابر -۶ است. ازآنجاکه تعداد اعداد همواره عددی مثبت است، لذا برای به‌دست آوردن تعداد اعداد در عبارت A، بدون درنظر گرفتن علامت‌ها عمل می‌کنیم. یعنی:

$$\text{تعداد اعداد} = \frac{۷۵۶ - ۶}{۶} + ۱ = \frac{۷۵۰}{۶} + ۱ = ۱۲۵ + ۱ = ۱۲۶$$

اکنون داریم:
$$A=-\frac{۱۲۶\times(۶+۷۵۶)}{۲}=-\frac{\overset{۶۳}{\cancel{۱۲۶}}\times ۷۶۲}{\underset{۱}{\cancel{۲}}}=-۴۸۰۰۶$$

نکته ۳: برای به‌دست آوردن مجموع عددهای طبیعی از ۱ تا هر عدد دلخواه مانند n، از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:
$$۱+۲+۳+\ldots+\mathbf{n}=\frac{\mathbf{n}(\mathbf{n}+۱)}{۲}$$

مثال ۹: حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.
$$۱+۲+۳+\ldots+۱۰۰۰=$$

جواب
$$۱+۲+۳+\ldots+۱۰۰۰=\frac{۱۰۰۰\times(۱۰۰۰+۱)}{۲}=\frac{\overset{۵۰۰}{\cancel{۱۰۰۰}}\times ۱۰۰۱}{\underset{۱}{\cancel{۲}}}=۵۰۰۵۰۰$$

نکته ۴: برای به‌دست آوردن مجموع عددهای طبیعی زوج از ۲ تا هر عدد دلخواه زوج مانند $۲n$، از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:
$$۲+۴+۶+\ldots+۲\mathbf{n}=\mathbf{n}(\mathbf{n}+۱)$$

مثال ۱۰: حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.
$$۲+۴+۶+\ldots+۸۵۲=$$

جواب
$$۲n=۸۵۲\quad\Rightarrow\quad n=\frac{۸۵۲}{۲}=۴۲۶$$
$$۲+۴+۶+\ldots+۸۵۲=۴۲۶(۴۲۶+۱)=۴۲۶\times۴۲۷=۱۸۱۹۰۲$$

نکته ۵: برای به‌دست آوردن مجموع عددهای طبیعی فرد از ۱ تا هر عدد دلخواه فرد مانند $۲n-۱$، از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:
$$۱+۳+۵+\ldots+۲\mathbf{n}-۱=\mathbf{n}^{۲}$$

مثال ۱۱: حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$۱+۳+۵+\ldots+۲۷۹=$$

جواب

$$۲n-۱=۲۷۹ \Rightarrow ۲n=۲۷۹+۱ \Rightarrow ۲n=۲۸۰ \Rightarrow n=\frac{۲۸۰}{۲}=۱۴۰$$

$$۱+۳+۵+\ldots+۲۷۹=۱۴۰^{۲}=۱۹۶۰۰$$

عمل دوتایی در عددهای صحیح:

در برخی موارد، بین دو عدد عملی وجود دارد که هیچ‌یک از چهار عمل اصلی نمی‌باشد. بلکه ممکن است با یک علامت یا یک نماد به‌صورت $*,\triangle,\square,\ldots$ تعریف شود. این نوع عمل‌ها را عمل دوتایی می‌گویند. اگر a و b دو عدد صحیح باشند، عمل $*$ را بین این دو عدد به‌صورت $a*b$ می‌نویسیم.

مثال ۱۲: اگر داشته باشیم $a*b=۲ab-۳b+۴$، حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\frac{(-۵)*(-۴)}{۳*(-۶)}$

جواب

$$(-۵)*(-۴)=۲\times(-۵)\times(-۴)-۳\times(-۴)+۴=۴۰+۱۲+۴=۵۶ \qquad (۱)$$

$$۳*(-۶)=۲\times۳\times(-۶)-۳\times(-۶)+۴=-۳۶+۱۸+۴=-۱۴ \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \frac{(-۵)*(-۴)}{۳*(-۶)}=\frac{۵۶}{-۱۴}=-۴$$

ب) $(۱۰*(-۷))*((-۸)*(-۲))$

جواب

$$۱۰*(-۷)=۲\times۱۰\times(-۷)-۳\times(-۷)+۴=-۱۴۰+۲۱+۴=-۱۱۵ \qquad (۱)$$

$$(-۸)*(-۲)=۲\times(-۸)\times(-۲)-۳\times(-۲)+۴=۳۲+۶+۴=۴۲ \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow (۱۰*(-۷))*((-۸)*(-۲))=(-۱۱۵)*۴۲=۲\times(-۱۱۵)\times۴۲-۳\times۴۲+۴$$

$$=-۹۶۶۰-۱۲۶+۴=-۹۷۸۲$$

حل برخی مسائل مهم عددهای گویا:

مثال ۱۳: حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$۱\frac{۱}{۱۵}+۲\frac{۲}{۱۵}+۳\frac{۳}{۱۵}+\cdots+۶۵\frac{۶۵}{۱۵}=$$

جواب

$$۱\frac{۱}{۱۵}+۲\frac{۲}{۱۵}+۳\frac{۳}{۱۵}+\cdots+۶۵\frac{۶۵}{۱۵}=(۱+۲+۳+\cdots+۶۵)+\left(\frac{۱}{۱۵}+\frac{۲}{۱۵}+\frac{۳}{۱۵}+\cdots+\frac{۶۵}{۱۵}\right)=$$

$$\frac{۶۵\times۶۶}{۲}+\frac{۱+۲+۳+\cdots+۶۵}{۱۵}=۲۱۴۵+\frac{۲۱۴۵}{۱۵}=۲۱۴۵+۱۴۳=۲۲۸۸$$

مثال ۱۴: حاصل عبارت زیر را به ساده‌ترین روش حساب کنید.

$$\frac{-۵۳۹۶}{۱۴۷۸}\times\frac{-۵۳۹۵}{۱۴۷۸}\times\frac{-۵۳۹۴}{۱۴۷۸}\times\cdots\times\frac{۵۳۹۶}{۱۴۷۸}=$$

جواب در ضرب داده شده، عدد گویای $\frac{۰}{۱۴۷۸}$ که برابر صفر است، وجود دارد. لذا حاصل ضرب عدد صفر در هر تعداد عدد گویا برابر صفر است.

مثال ۱۵: اگر $A=\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۵}{۶}\times\cdots\times\frac{۹۹۹}{۱۰۰۰}$ و $B=\frac{۲}{۳}\times\frac{۴}{۵}\times\frac{۶}{۷}\times\cdots\times\frac{۱۰۰۰}{۱۰۰۱}$، حاصل $۲۰۰۲A\times B$ را به‌دست آورید.

جواب

$$۲۰۰۲A\times B=۲۰۰۲\times\left(A\times B\right)=$$

$$۲۰۰۲\times\left(\frac{\cancel{۱}}{\cancel{۲}}\times\frac{\cancel{۳}}{\cancel{۴}}\times\frac{\cancel{۵}}{\cancel{۶}}\times\cdots\times\frac{\cancel{۹۹۹}}{\cancel{۱۰۰۰}}\times\frac{\cancel{۲}}{\cancel{۳}}\times\frac{\cancel{۴}}{\cancel{۵}}\times\frac{\cancel{۶}}{\cancel{۷}}\times\cdots\times\frac{\cancel{۱۰۰۰}}{۱۰۰۱}\right)=\frac{\overset{۲}{\cancel{۲۰۰۲}}}{۱}\times\frac{۱}{\underset{۱}{\cancel{۱۰۰۱}}}=۲$$

مثال ۱۶: حاصل عبارت زیر را محاسبه کنید.

$$\frac{\left(\frac{۵}{۲۴}-\frac{۱}{۱۸}+\frac{۷}{۳۰}\right)\times\frac{۱۸}{۱۳۹}}{\left(\frac{۱۱}{۱۵}+\frac{۷}{۲۵}-\frac{۱}{۵}+\frac{۷}{۱۰}\right)\times\frac{۱۵}{۲۲۷}}=$$

جواب

$$\frac{\left(\frac{۵}{۲۴}-\frac{۱}{۱۸}+\frac{۷}{۳۰}\right)\times\frac{۱۸}{۱۳۹}}{\left(\frac{۱۱}{۱۵}+\frac{۷}{۲۵}-\frac{۱}{۵}+\frac{۷}{۱۰}\right)\times\frac{۱۵}{۲۲۷}}=\frac{\left(\frac{۷۵-۲۰+۸۴}{۳۶۰}\right)\times\frac{۱۸}{۱۳۹}}{\left(\frac{۱۱۰+۴۲-۳۰+۱۰۵}{۱۵۰}\right)\times\frac{۱۵}{۲۲۷}}=\frac{\frac{۱۳۹}{۳۶۰}\times\frac{۱۸}{۱۳۹}}{\frac{۲۲۷}{۱۵۰}\times\frac{۱۵}{۲۲۷}}=$$

$$\frac{\frac{\overset{۱}{\cancel{۱۳۹}}}{\underset{۲۰}{\cancel{۳۶۰}}}\times\frac{\overset{۱}{\cancel{۱۸}}}{\underset{۱}{\cancel{۱۳۹}}}}{\frac{\overset{۱}{\cancel{۲۲۷}}}{\underset{۱۰}{\cancel{۱۵۰}}}\times\frac{\overset{۱}{\cancel{۱۵}}}{\underset{۱}{\cancel{۲۲۷}}}}=\frac{\frac{۱}{۲۰}}{\frac{۱}{۱۰}}=\frac{۱\times\overset{۱}{\cancel{۱۰}}}{\underset{۲}{\cancel{۲۰}}\times۱}=\frac{۱}{۲}$$

مثال ۱۷: حاصل کسر زیر را به‌دست آورید.

$$A=\frac{\frac{۱}{۱۰۰۱}+\frac{۳}{۱۰۰۱}+\frac{۵}{۱۰۰۱}+\cdots+۱}{۱+۳+۵+\cdots+۱۰۰۱}$$

جواب

جواب صورت کسر: $\frac{۱}{۱۰۰۱}+\frac{۳}{۱۰۰۱}+\frac{۵}{۱۰۰۱}+\cdots+\frac{۱۰۰۱}{۱۰۰۱}=\frac{۱+۳+۵+\cdots+۱۰۰۱}{۱۰۰۱}=\frac{۵۰۱^۲}{۱۰۰۱}$

$$(۲n-۱=۱۰۰۱ \;\Rightarrow\; ۲n=۱۰۰۲ \;\Rightarrow\; n=۵۰۱)$$

جواب مخرج کسر: $۱+۳+۵+\cdots+۱۰۰۱=۵۰۱^۲$

$$A=\frac{\frac{۵۰۱^۲}{۱۰۰۱}}{\frac{۵۰۱^۲}{۱}}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۵۰۱^۲}}\times ۱}{\underset{۱}{\cancel{۵۰۱^۲}}\times ۱۰۰۱}=\frac{۱}{۱۰۰۱}$$

نکته ۶: ترتیب عملیات‌ها در عددهای گویا، مشابه ترتیب عملیات‌ها در عددهای صحیح است.

مثال ۱۸: حاصل کسر زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$\frac{۱\frac{۱۷}{۱۸}\times\left(۱\frac{۵۹}{۷۰}+\frac{۳۷}{۴۲}+۲\frac{۱۹}{۳۰}\right)-۱۰}{۱۴-\left(۴۹\frac{۱}{۳}\div ۱۶-۱۴\div ۸\frac{۱}{۶}\right)\times ۷}$$

جواب

جواب صورت کسر: $۱\frac{۱۷}{۱۸}\times\left(۱\frac{۵۹}{۷۰}+\frac{۳۷}{۴۲}+۲\frac{۱۹}{۳۰}\right)-۱۰=\frac{۳۵}{۱۸}\times\left(\frac{۳۸۷+۱۸۵+۵۵۳}{۲۱۰}\right)-۱۰=$

$$\left(\frac{۳۵}{۱۸}\times\frac{۱۱۲۵}{۲۱۰}\right)-۱۰=\frac{\overset{۱}{\cancel{۳۵}}\times\overset{۱۲۵}{\cancel{۱۱۲۵}}}{\underset{۲}{\cancel{۱۸}}\times\underset{۶}{\cancel{۲۱۰}}}=\frac{۱۲۵}{۱۲}-۱۰=\frac{۱۲۵-۱۲۰}{۱۲}=\frac{۵}{۱۲} \qquad (۱)$$

جواب مخرج کسر: $۱۴-\left(۴۹\frac{۱}{۳}\div ۱۶-۱۴\div ۸\frac{۱}{۶}\right)\times ۷=۱۴-\left(\frac{۱۴۸}{۳}\div ۱۶-۱۴\div\frac{۴۹}{۶}\right)\times ۷=$

$$۱۴-\left(\frac{\overset{۳۷}{\cancel{۱۴۸}}}{۳}\times\frac{۱}{\underset{۴}{\cancel{۱۶}}}-\frac{\overset{۲}{\cancel{۱۴}}}{۱}\times\frac{۶}{\underset{۷}{\cancel{۴۹}}}\right)\times ۷=۱۴-\left(\frac{۳۷}{۱۲}-\frac{۱۲}{۷}\right)\times ۷=۱۴-\left(\frac{۲۵۹-۱۴۴}{\underset{۱۲}{\cancel{۸۴}}}\right)\times\overset{۱}{\cancel{۷}}=$$

$$۱۴-\frac{۱۱۵}{۱۲}=\frac{۱۶۸-۱۱۵}{۱۲}=\frac{۵۳}{۱۲} \qquad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \frac{\frac{۵}{۱۲}}{\frac{۵۳}{۱۲}}=\frac{۵\times \cancel{۱۲}^{۱}}{\cancel{۱۲}_{۱}\times ۵۳}=\frac{۵}{۵۳}$$

نکته ۷: اگر صورت و مخرج کسری را n برابر کنیم، حاصل کسر تغییری نمی‌کند. ولی مجموع و اختلاف صورت و مخرج آن نیز n برابر و حاصل ضرب صورت و مخرج آن $n^{۲}$ برابر می‌شود.

مثال ۱۹: کسری مساوی با $\frac{۱۵۴}{۶۶}$ پیدا کنید که:

الف) مجموع صورت و مخرج آن ۱۵۰ باشد.

جواب ابتدا کسر $\frac{۱۵۴}{۶۶}$ را ساده می‌کنیم. لذا داریم: $\frac{۱۵۴}{۶۶}=\frac{۷}{۳}$

$۷+۳=۱۰ \xrightarrow{\times ۱۵} ۱۵۰ \Rightarrow$ صورت و مخرج کسر را در ۱۵ ضرب می‌کنیم. $\Rightarrow \frac{۱۰۵}{۴۵}$

ب) تفاضل صورت و مخرج آن ۱۲۸ باشد.

جواب $۷-۳=۴ \xrightarrow{\times ۳۲} ۱۲۸ \Rightarrow$ صورت و مخرج کسر را در ۳۲ ضرب می‌کنیم. $\Rightarrow \frac{۲۲۴}{۹۶}$

ج) حاصل ضرب صورت و مخرج آن ۵۲۵ باشد.

جواب

$$۷\times ۳=۲۱ \quad , \quad ۵۲۵\div ۲۱=۲۵=۵^{۲}$$

یعنی اگر صورت و مخرج کسر را ۵ برابر کنیم، حاصل ضرب صورت و مخرج آن ۲۵ برابر می‌شود. بنابراین کسر موردنظر برابر است با: $\frac{۷}{۳}\times\frac{۵}{۵}=\frac{۳۵}{۱۵}$

مثال ۲۰: به صورت کسری ۲ واحد اضافه می‌کنیم و از مخرج آن ۲ واحد کم می‌کنیم. کسر حاصل با کسر اولیه برابر خواهد شد. کسر اولیه را بیابید.

جواب کسر موردنظر را $\frac{x}{y}$ درنظر می‌گیریم. لذا داریم:

$$\frac{x}{y}=\frac{x+۲}{y-۲}\Rightarrow x(y-۲)=y(x+۲)\Rightarrow \cancel{xy}-۲x=\cancel{yx}+۲y\Rightarrow -۲x=۲y\Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{۲}{-۲}\Rightarrow \frac{x}{y}=-\frac{۱}{۱}$$

روش‌های یافتن چند عدد گویا بین دو عدد گویا:

بین هر دو عدد گویا بی‌شمار عدد گویا وجود دارد که برای پیدا کردن چند عدد گویا بین دو عدد گویا از سه روش مختلف می‌توان استفاده کرد:

الف) روش هم‌مخرج کردن دو عدد گویا: دو عدد را هم‌مخرج کرده و کسرهای مساوی با آن‌ها را می‌نویسیم. چنانچه صورت کسرهای حاصل متوالی باشند و نتوان کسری بین آن‌ها پیدا کرد، صورت و مخرج کسرهای حاصل را در یک واحد بیش‌تر از تعداد عددهای گویایی که باید پیدا کنیم، ضرب می‌کنیم تا بتوانیم بین دو کسر، به تعداد خواسته شده، عدد گویا بیابیم. (این روش را در کتاب مقدماتی بیان کردیم.)

ب) روش مجموع صورت‌ها و مخرج‌های دو عدد گویا: اگر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ دو کسر دلخواه و $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$، آن‌گاه کسر $\frac{a+c}{b+d}$ بین آن دو کسر قرار دارد. یعنی:

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}<\frac{\mathbf{a}+\mathbf{c}}{\mathbf{b}+\mathbf{d}}<\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$$

تذکر باید دقت داشته باشیم که اگر بخواهیم تعداد بیش‌تری عدد گویا بین دو عدد داده شده پیدا کنیم، همین روش را برای هر دو عدد گویای متوالی انجام می‌دهیم.**

ج) روش میانگین دو عدد گویا: می‌دانیم میانگین هر دو عدد دلخواه، بین آن دو عدد قرار دارد. از این مطلب می‌توانیم برای پیدا کردن یک عدد گویا بین دو عدد گویا استفاده کنیم. یعنی:

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}<\frac{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}+\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}}{۲}<\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$$

مثال ۲۱: بین دو عدد $-\frac{۷}{۵}$ و $-\frac{۴}{۳}$ سه عدد گویا بیابید. (به سه روش مختلف)

جواب

روش اول:

$$\left.\begin{array}{l}-\frac{۷}{۵}=-\frac{۲۱}{۱۵}\overset{\times ۴}{\underset{\times ۴}{=}}-\frac{۸۴}{۶۰}\\[2mm] -\frac{۴}{۳}=-\frac{۲۰}{۱۵}\overset{\times ۴}{\underset{\times ۴}{=}}-\frac{۸۰}{۶۰}\end{array}\right\}\Rightarrow -\frac{۸۴}{۶۰}<-\frac{۸۳}{۶۰}<-\frac{۸۲}{۶۰}<-\frac{۸۱}{۶۰}<-\frac{۸۰}{۶۰}\Rightarrow -\frac{۷}{۵}<-\frac{۸۳}{۶۰}<-\frac{۸۲}{۶۰}<-\frac{۸۱}{۶۰}<-\frac{۴}{۳}$$

روش دوم:

$$-\frac{۷}{۵}<-\frac{۴}{۳}\quad\Rightarrow\quad -\frac{۷}{۵}<-\frac{۷+۴}{۵+۳}<-\frac{۴}{۳}\quad\Rightarrow\quad -\frac{۷}{۵}<-\frac{۱۱}{۸}<-\frac{۴}{۳}\quad\Rightarrow$$

$$-\frac{۷}{۵}<-\frac{۷+۱۱}{۵+۸}<-\frac{۱۱}{۸}<-\frac{۱۱+۴}{۸+۳}<-\frac{۴}{۳}\Rightarrow -\frac{۷}{۵}<-\frac{۱۸}{۱۳}<-\frac{۱۱}{۸}<-\frac{۱۵}{۱۱}<-\frac{۴}{۳}$$

روش سوم:
$$-\frac{۷}{۵}<-\frac{۴}{۳} \Rightarrow -\frac{۷}{۵}<\frac{\left(-\frac{۷}{۵}\right)+\left(-\frac{۴}{۳}\right)}{۲}<-\frac{۴}{۳} \Rightarrow -\frac{۷}{۵}<-\frac{۴۱}{۳۰}<-\frac{۴}{۳} \Rightarrow$$
$$-\frac{۷}{۵}<\frac{\left(-\frac{۷}{۵}\right)+\left(-\frac{۴۱}{۳۰}\right)}{۲}<-\frac{۴۱}{۳۰}<\frac{\left(-\frac{۴۱}{۳۰}\right)+\left(-\frac{۴}{۳}\right)}{۲}<-\frac{۴}{۳} \Rightarrow -\frac{۷}{۵}<-\frac{۸۳}{۶۰}<-\frac{۴۱}{۳۰}<-\frac{۸۱}{۶۰}<-\frac{۴}{۳}$$

کسرهای تلسکوپی:

تعریف هر کسر که مخرج آن ضرب دو عدد و صورت آن اختلاف همان دو عدد باشد، کسر تلسکوپی نام دارد. این‌گونه کسرها را می‌توان به‌صورت تفریق دو کسر نوشت طوری که مخرج دو کسر، همان دو عدد و صورت دو کسر، ۱ باشد. مانند:

$$\frac{۳}{۵\times۸}=\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۸}$$

چنانچه در مخرج کسری ضرب دو عدد و صورت آن جمع همان دو عدد باشد، می‌توان کسر را به صورت جمع دو کسر نوشت طوری که مخرج دو کسر، همان دو عدد و صورت دو کسر، ۱ باشد. مانند:

$$\frac{۱۳}{۵\times۸}=\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۸}$$

مثال ۲۲: حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$\frac{۲}{۳\times۵}+\frac{۲}{۵\times۷}+\frac{۲}{۷\times۹}+\cdots+\frac{۲}{۹۹\times۱۰۱}=$$

جواب

$$\left.\begin{array}{l}\frac{۲}{۳\times۵}=\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۵}\\ \frac{۲}{۵\times۷}=\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۷}\\ \frac{۲}{۷\times۹}=\frac{۱}{۷}-\frac{۱}{۹}\\ \vdots\\ \frac{۲}{۹۹\times۱۰۱}=\frac{۱}{۹۹}-\frac{۱}{۱۰۱}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۲}{۳\times۵}+\frac{۲}{۵\times۷}+\frac{۲}{۷\times۹}+\cdots+\frac{۲}{۹۹\times۱۰۱}=\frac{۱}{۳}\underbrace{-\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۵}}_{۰}\underbrace{-\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۷}}_{۰}\underbrace{-\frac{۱}{۹}+}_{۰}\cdots\underbrace{+\frac{۱}{۹۹}}_{۰}-\frac{۱}{۱۰۱}$$
$$=\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۱۰۱}=\frac{۱۰۱-۳}{۳۰۳}=\frac{۹۸}{۳۳}$$

مثال ۲۳: حاصل عبارت زیر را به ساده‌ترین روش بیابید.

$$\frac{۲}{۵\times۷}+\frac{۳}{۷\times۱۰}+\frac{۴}{۱۰\times۱۴}+\frac{۵}{۱۴\times۱۹}+\frac{۶}{۱۹\times۲۵}=$$

جواب

$$\frac{۲}{۵\times۷}+\frac{۳}{۷\times۱۰}+\frac{۴}{۱۰\times۱۴}+\frac{۵}{۱۴\times۱۹}+\frac{۶}{۱۹\times۲۵}=$$

$$\frac{۱}{۵}-\cancel{\frac{۱}{۷}}+\cancel{\frac{۱}{۷}}-\cancel{\frac{۱}{۱۰}}+\cancel{\frac{۱}{۱۰}}-\cancel{\frac{۱}{۱۴}}+\cancel{\frac{۱}{۱۴}}-\cancel{\frac{۱}{۱۹}}+\cancel{\frac{۱}{۱۹}}-\frac{۱}{۲۵}=\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۲۵}=\frac{۵-۱}{۲۵}=\frac{۴}{۲۵}$$

کسرهای مسلسل:

تعریف هر کسر به شکل $a_۱+\cfrac{۱}{a_۲+\cfrac{۱}{a_۳+\cfrac{۱}{a_۴+\cdots}}}$ را یک کسر مسلسل می‌نامند که بر دو نوع کسرهای مسلسل متناهی و نامتناهی می‌باشد. برای حل این‌گونه کسرها معمولاً از پایین‌ترین کسر شروع به حل می‌کنیم تا به بالاترین کسر برسیم.

مثال ۲۴: حاصل عبارت مقابل را به‌دست آورید.

$$۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۳}}}}=$$

جواب

$$۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۳}}}}=۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{\cfrac{۴}{۳}}}}=۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۳}{۴}}}=۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{\cfrac{۷}{۴}}}=۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۴}{۷}}=۱+\cfrac{۱}{\cfrac{۱۱}{۷}}=۱+\frac{۷}{۱۱}=\frac{۱۸}{۱۱}$$

مثال ۲۵: حاصل عبارت زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$۱-\cfrac{۱}{۱-\cfrac{۱}{۱-\cfrac{۱}{۱-\cfrac{۱}{۳+۲-۷}}}}=$$

جواب

$$۱-\cfrac{۱}{۱-\cfrac{۱}{۱-\cfrac{۱}{۱-\cfrac{۱}{۳+۲-۷}}}}=۱-\cfrac{۱}{۱-\cfrac{۱}{۱-\cfrac{۱}{۱-\cfrac{۱}{-۲}}}}=۱-\cfrac{۱}{۱-\cfrac{۱}{۱-\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۲}}}}=$$

$$۱-\cfrac{۱}{۱-\cfrac{۱}{۱-\cfrac{۱}{\cfrac{۳}{۲}}}}=۱-\cfrac{۱}{۱-\cfrac{۱}{۱-\cfrac{۲}{۳}}}=۱-\cfrac{۱}{۱-\cfrac{۱}{\cfrac{۱}{۳}}}=۱-\frac{۱}{۱-۳}=۱-\frac{۱}{-۲}=۱+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

کسرهای تحویل‌ناپذیر:

تعریف **کسری که ساده نشدنی باشد، یا به عبارتی ب.م.م صورت و مخرج آن برابر ۱ باشد، کسر تحویل‌ناپذیر نام دارد.**

مانند $\frac{۷}{۸}$، $\frac{۳}{۴}$، $\frac{۹}{۱۱}$ **و ... .**

مثال ۲۶: کسر تحویل‌ناپذیری بیابید که اگر از صورت آن ۵ واحد کم کنیم و به مخرج آن ۳ واحد اضافه کنیم، آن کسر تغییر نکند.

جواب

$$\frac{x}{y}=\frac{x-۵}{y+۳}\Rightarrow x(y+۳)=y(x-۵)\Rightarrow \cancel{xy}+۳x=\cancel{yx}-۵y\Rightarrow ۳x=-۵y\Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{-۵}{۳}=-\frac{۵}{۳}$$

انواع کسرهای تحویل‌ناپذیر و تبدیل آن‌ها به عدد اعشاری:

هر کسر متعارفی را می‌توان به‌صورت یک عدد اعشاری نمایش داد. با توجه به نوع نمایش کسرها، دو نوع کسر متعارفی تحویل‌ناپذیر وجود دارد:

الف) نماد اعشاری تحقیقی مختوم: در هر کسر ساده نشدنی، چنانچه مخرج آن را به شمارنده‌های اول تجزیه کرده و پس از تجزیه، دو عدد اول ۲ یا ۵ و یا هر دو ظاهر شوند، نماد اعشاری این کسرها را نماد اعشاری تحقیقی مختوم (باپایان) می‌نامند. یعنی اگر a عددی صحیح و m و n نیز عدد صحیح نامنفی باشند، کسر $\frac{a}{۲^m\times ۵^n}$ دارای نماد اعشاری تحقیقی می‌باشد. برای تبدیل این‌گونه کسرها به عدد اعشاری، کافی است مخرج آن‌ها را به‌صورت عدد توان‌داری با پایه‌ی ۱۰ درآوریم.

مثال ۲۷: کسرهای $-\frac{۳}{۸}$ و $-\frac{۷}{۲۰}$ و $\frac{۹۸}{۱۲۵}$ را به عدد اعشاری تبدیل کنید.

جواب

$$-\frac{۳}{۸}=-\frac{۳}{۲^۳}\times\frac{۵^۳}{۵^۳}=-\frac{۳\times ۱۲۵}{۱۰^۳}=-\frac{۳۷۵}{۱۰۰۰}=-۰/۳۷۵$$

$$-\frac{۷}{۲۰}=-\frac{۷}{۲^۲\times ۵^۱}\times\frac{۵}{۵}=-\frac{۷\times ۵}{۱۰^۲}=-\frac{۳۵}{۱۰۰}=-۰/۳۵$$

$$\frac{۹۸}{۱۲۵}=\frac{۹۸}{۵^۳}\times\frac{۲^۳}{۲^۳}=\frac{۹۸\times ۸}{۱۰^۳}=\frac{۷۸۴}{۱۰۰۰}=۰/۷۸۴$$

ب) نماد اعشاری متناوب: اگر نماد اعشاری یک کسر متعارفی، تحقیقی مختوم نباشد، دو حالت وجود دارد:

۱) نماد اعشاری متناوب ساده: چنانچه در تجزیه‌ی مخرج کسر، هیچ‌یک از شمارنده‌های ۲ و ۵ ظاهر نشود، در این صورت نماد اعشاری کسر را نماد اعشاری متناوب ساده می‌گویند. برای تبدیل این‌گونه کسرها به عدد اعشاری، کافی است صورت کسر را بر مخرج آن تقسیم کنیم. پس از تقسیم مشاهده می‌کنیم که یک یا چند عدد در خارج‌قسمت تقسیم و بعد از ممیز به‌طور متوالی تکرار می‌شوند. چنین عددهایی را عددهای اعشاری متناوب ساده می‌نامند و رقم‌هایی که تکرار می‌شوند را رقم‌های دوره‌ی گردش می‌نامند. برای نشان دادن دوره‌ی گردش، بالای رقم یا رقم‌هایی که دوره‌ی گردش دارند، یک خط کوچک می‌گذاریم.

مثال ۲۸: نماد اعشاری کسرهای $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۱۳}{۱۱}$ را بنویسید.

جواب

۲/۰۰۰ | ۳
−۱/۸ | ۰/۶۶۶...
۰/۲۰
−۰/۱۸
۰/۰۲۰
−۰/۰۱۸
۰/۰۰۲

$\Rightarrow \frac{۲}{۳} = ۰/\overline{۶}$

رقم ۶، رقم دوره‌ی گردش است.

۱۳/۰۰۰۰ | ۱۱
−۱۱ | ۱/۱۸۱۸...
۲/۰
−۱/۱
۰/۹۰
−۰/۸۸
۰/۰۲۰
−۰/۰۱۱
۰/۰۰۹۰
−۰/۰۰۸۸
۰/۰۰۰۲

$\Rightarrow \frac{۱۳}{۱۸} = ۱/\overline{۱۸}$

دو رقم ۱ و ۸، رقم‌های دوره‌ی گردش هستند.

۲) نماد اعشاری متناوب مرکب: چنانچه در تجزیه‌ی مخرج کسر، یکی از شمارنده‌های ۲ و ۵ به همراه شمارنده‌ی دیگری به غیر از این عددها ظاهر شوند، در این صورت نماد اعشاری کسر را نماد اعشاری متناوب مرکب می‌نامند. برای تبدیل این‌گونه کسرها به عدد اعشاری، کافی است صورت کسر را بر مخرج آن تقسیم کنیم. پس از تقسیم مشاهده می‌کنیم که ابتدا یک یا دو عدد در خارج‌قسمت تقسیم و بعد از ممیز ظاهر می‌شوند که به آن‌ها رقم‌های غیر دوره‌ی گردش می‌گویند. سپس بعد از این رقم‌ها، رقم‌های تکراری ظاهر می‌شوند که به آن‌ها رقم‌های دوره‌ی گردش می‌گویند.

مثال ۲۹: نماد اعشاری کسرهای $\frac{19}{15}$ و $-\frac{17}{55}$ را بنویسید.

جواب

$$\begin{array}{r|l} 19/00 & 15 \\ \cline{2-2} -15 & 1/266\ldots \\ \cline{1-1} 4/0 & \\ -3/0 & \\ \cline{1-1} 1/00 & \\ -0/90 & \\ \cline{1-1} 0/100 & \\ -0/090 & \\ \cline{1-1} 0/010 & \end{array} \qquad \Rightarrow \quad \frac{19}{15}=1/2\overline{6}$$

رقم ۲، رقم غیر دوره‌ی گردش و رقم ۶، رقم دوره‌ی گردش می‌باشد.

$$\begin{array}{r|l} 17/0000000 & 55 \\ \cline{2-2} -16/5 & 0/30909000\ldots \\ \cline{1-1} 0/500 & \\ -0/495 & \\ \cline{1-1} 0/00500 & \\ -0/00495 & \\ \cline{1-1} 0/000050 & \end{array} \qquad \Rightarrow \quad -\frac{17}{55}=-0/3\overline{09}$$

رقم ۳، رقم غیر دوره‌ی گردش و دو رقم ۰ و ۹، رقم‌های دوره‌ی گردش می‌باشند.

مثال ۳۰: نماد اعشاری هریک از کسرهای متعارفی زیر را به‌دست آورید و تحقیق کنید نماد اعشاری حاصل کدام‌یک از موارد ذکر شده است؟

الف) $\frac{15}{24}$

جواب

$$\frac{15}{24}=\frac{5}{8}=\frac{5}{2^3}\times\frac{5^3}{5^3}=\frac{5\times 5^3}{10^3}=\frac{625}{1000}=0/625$$ نماد اعشاری تحقیقی مختوم

ب) $\frac{2}{9}$

جواب

$$\begin{array}{r|l} 2/000 & 9 \\ \cline{2-2} -1/8 & 0/22\ldots \\ \cline{1-1} 0/20 & \\ -0/18 & \\ \cline{1-1} 0/02 & \end{array}$$

$\Rightarrow \frac{2}{9} = 0/\overline{2}$ نماد اعشاری متناوب ساده

ج) $\frac{37}{30}$

جواب

$$\begin{array}{r|l} 37/000 & 30 \\ \cline{2-2} -30 & 1/233\ldots \\ \cline{1-1} 7/0 & \\ -6/0 & \\ \cline{1-1} 1/00 & \\ -0/90 & \\ \cline{1-1} 0/100 & \\ -0/090 & \\ \cline{1-1} 0/010 & \end{array}$$

$\Rightarrow \frac{37}{30} = 1/2\overline{3}$ نماد اعشاری متناوب مرکب

د) $-\frac{13}{27}$

جواب

$$\begin{array}{r|l} 13/000 & 27 \\ \cline{2-2} -10/8 & 0/481\ldots \\ \cline{1-1} 2/20 & \\ -2/16 & \\ \cline{1-1} 0/040 & \\ -0/027 & \\ \cline{1-1} 0/013 & \end{array}$$

$\Rightarrow -\frac{13}{27} = -0/\overline{481}$ نماد اعشاری متناوب ساده

مثال ۳۱: بدون انجام عمل تقسیم بررسی کنید که کدام‌یک از کسرهای زیر، تحقیقی، متناوب ساده و متناوب مرکب است؟

$$\frac{۵}{۲۴}, \frac{۲۳}{۸۰}, \frac{۱۴}{۹}$$

جواب

متناوب مرکب $۲۴ = ۲^۳ \times ۳ \Rightarrow \frac{۵}{۲۴}$

اعشاری تحقیقی مختوم $۸۰ = ۲^۴ \times ۵ \Rightarrow \frac{۲۳}{۸۰}$

متناوب ساده $۹ = ۳^۲ \Rightarrow \frac{۱۴}{۹}$

نمایش کسری عددهای اعشاری:

با توجه به نوع نماد اعشاری، برای تبدیل عدد اعشاری به عدد گویا، سه حالت وجود دارد:

الف) تبدیل عدد اعشاری تحقیقی مختوم به عدد گویا: در این حالت عدد را بدون درنظر گرفتن ممیز در صورت کسر نوشته و به تعداد رقم‌های اعشاری عدد، در مخرج کسر جلوی عدد ۱، رقم صفر می‌گذاریم.

مثال ۳۲: عددهای $۳/۷$ و $-۰/۰۴۲$ را به عدد گویا تبدیل کنید.

جواب

$$۳/۷ = \frac{۳۷}{۱۰} \quad , \quad -۰/۰۴۲ = -\frac{۴۲}{۱۰۰۰}$$

ب) تبدیل عدد اعشاری متناوب ساده به عدد گویا: در این حالت، رقم‌هایی را که دارای دوره‌ی گردش هستند، در صورت کسر نوشته و در مخرج کسر، به تعداد رقم‌های دوره‌ی گردش، رقم ۹ قرار می‌دهیم.

مثال ۳۳: نمایش کسری عددهای $۰/\overline{۳}$ و $۰/\overline{۱۲}$ و $-۰/\overline{۱۵۴}$ را بنویسید.

جواب

$$۰/\overline{۳} = \frac{۳}{۹} = \frac{۱}{۳} \quad , \quad ۰/\overline{۱۲} = \frac{۱۲}{۹۹} = \frac{۴}{۳۳} \quad , \quad -۰/\overline{۱۵۴} = -\frac{۱۵۴}{۹۹۹}$$

ج) تبدیل عدد اعشاری متناوب مرکب به عدد گویا: در این حالت، رقم‌های غیر دوره‌ی گردش را از کل عدد اعشاری کم می‌کنیم و در صورت کسر قرار می‌دهیم، سپس در مخرج کسر به تعداد رقم‌های دوره‌ی گردش، رقم ۹ و جلوی آن به تعداد رقم‌های غیر دوره‌ی گردش، رقم صفر قرار می‌دهیم.

مثال ۳۴: نمایش کسری عددهای $۰/۲\overline{۵۳}$ و $-۰/۱۴\overline{۲۷}$ را بنویسید.

جواب

$$۰/۲\overline{۵۳} = \frac{۲۵۳ - ۲}{۹۹۰} = \frac{۲۵۱}{۹۹۰} \quad , \quad -۰/۱۴\overline{۲۷} = -\frac{۱۴۲۷ - ۱۴}{۹۹۰۰} = -\frac{۱۴۱۳}{۹۹۰۰} = -\frac{۱۵۷}{۱۱۰۰}$$

مثال ۳۵: هریک از نمادهای اعشاری زیر را به کسر متعارفی تحویل‌ناپذیر تبدیل کنید.

الف) $۳/۷\overline{۵۲}$

جواب

$$۳/۷\overline{۵۲} = ۳\,\frac{۷۵۲-۷}{۹۹۰} = ۳\,\frac{۷۴۵}{۹۹۰} = ۳\,\frac{۱۴۹}{۱۹۸} = \frac{۷۴۳}{۱۹۸}$$

ب) $۰/۰\overline{۵۷}$

جواب

$$۰/۰\overline{۵۷} = \frac{۵۷}{۹۹۰} = \frac{۱۹}{۳۳۰}$$

ج) $۰/\overline{۱۲۶}$

جواب

$$۰/\overline{۱۲۶} = \frac{۱۲۶}{۹۹۹} = \frac{۱۴}{۱۱۱}$$

د) $۰/۸۴۲$

جواب

$$۰/۸۴۲ = \frac{۸۴۲}{۱۰۰۰} = \frac{۴۲۱}{۵۰۰}$$

نکته ۸: در تساوی دو کسر همواره داریم:

۱) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$

۲) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

۳) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

۴) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{d}{b}$

۵) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

۶) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

۷) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$

۸) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c}$

نکته ۹: در تساوی بیش‌تر از سه کسر، رابطه‌ی زیر همواره برقرار است:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \cdots \Rightarrow \frac{a+c+e+\cdots}{b+d+f+\cdots} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \cdots$$

مثال ۳۶: اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$، ثابت کنید: $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}$.

جواب

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a}{a+c}=\frac{b}{b+d} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}$$

مثال ۳۷: اگر $\frac{a+۴}{۴}=\frac{b+۷}{۷}$، حاصل $\frac{a}{b}$ را بیابید.

جواب

$$\frac{a+۴}{۴}=\frac{b+۷}{۷} \Rightarrow \frac{a+۴-۴}{۴}=\frac{b+۷-۷}{۷} \Rightarrow \frac{a}{۴}=\frac{b}{۷} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{۴}{۷}$$

مثال ۳۸: اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$، ثابت کنید: $\frac{۲a+۳c}{۲b+۳d}=\frac{a}{b}$.

جواب

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{۲a}{۲b}=\frac{۳c}{۳d} \Rightarrow \frac{۲a+۳c}{۲b+۳d}=\frac{۲a}{۲b}=\frac{a}{b}$$

مثال ۳۹: اگر $\frac{a}{۳}=\frac{b}{۵}=\frac{c}{۱۱}$، آن‌گاه حاصل $\frac{۵a+۴b}{۳c}$ را بیابید.

جواب فرض می‌کنیم $\frac{a}{۳}=\frac{b}{۵}=\frac{c}{۱۱}=m$. عددهای a، b و c را برحسب m می‌نویسیم. لذا داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a}{۳}=m \Rightarrow a=۳m\\ \frac{b}{۵}=m \Rightarrow b=۵m\\ \frac{c}{۱۱}=m \Rightarrow c=۱۱m\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۵a+۴b}{۳c}=\frac{۵(۳m)+۴(۵m)}{۳(۱۱m)}=\frac{۱۵m+۲۰m}{۳۳m}=\frac{۳۵m}{۳۳m}=\frac{۳۵}{۳۳}$$

مثال ۴۰: اگر $\frac{a}{b}=\frac{۴}{۹}$ و $\frac{c}{d}=\frac{۸}{۵}$، آن‌گاه حاصل $\frac{۲ac+۵bd}{۳bd-ac}$ را بیابید.

جواب

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a}{b}=\frac{۴}{۹} \Rightarrow a=\frac{۴}{۹}b\\ \frac{c}{d}=\frac{۸}{۵} \Rightarrow c=\frac{۸}{۵}d\end{array}\right\} \Rightarrow ac=\left(\frac{۴}{۹}b\right)\left(\frac{۸}{۵}\right)d=\frac{۳۲}{۴۵}bd$$

$$\frac{۲ac+۵bd}{۳bd-ac}=\frac{۲\left(\frac{۳۲}{۴۵}bd\right)+۵bd}{۳bd-\left(\frac{۳۲}{۴۵}bd\right)}=\frac{\frac{۶۴}{۴۵}bd+۵bd}{۳bd-\frac{۳۲}{۴۵}bd}=\frac{\frac{۲۸۹}{۴۵}bd}{\frac{۱۰۳}{۴۵}bd}=\frac{۲۸۹}{۱۰۳}$$

نکته ۱۰: چنانچه در مسئله‌ای چند تخفیف متوالی داده شده باشد، برای محاسبه‌ی درصد تخفیف نهایی باید درصد پرداختی هریک از تخفیف‌ها را محاسبه کرده و در هم ضرب کنیم (حاصل را برحسب ٪۱۰۰ محاسبه کنیم)، سپس حاصل را از ٪۱۰۰ کم کنیم.

مثال ۴۱: کالایی را با چهار تخفیف متوالی ٪۱۰، ٪۱۲ و ٪۱۵ خریداری کردیم. چند درصد تخفیف گرفته‌ایم؟

جواب

درصد پرداختی $\quad ۱۰۰\% - ۱۰\% = ۹۰\% \Rightarrow ۱۰\%$ تخفیف

درصد پرداختی $\quad ۱۰۰\% - ۱۲\% = ۸۸\% \Rightarrow ۱۲\%$ تخفیف

درصد پرداختی $\quad ۱۰۰\% - ۱۵\% = ۸۵\% \Rightarrow ۱۵\%$ تخفیف

درصد پرداختی نهایی $\quad \frac{۹۰}{۱۰۰} \times \frac{۸۸}{۱۰۰} \times \frac{۸۵}{۱۰۰} = \frac{۶۷۳۲۰۰}{۱۰۰۰۰۰۰} = \frac{۶۷۳۲}{۱۰۰۰۰} = \frac{۶۷/۳۲}{۱۰۰} = ۶۷/۳۲\%$

درصد تخفیف نهایی $\quad ۱۰۰\% - ۶۷/۳۲ = ۳۲/۶۸$

مثال ۴۲: قیمت کتابی ۱۵۰۰۰ تومان می‌باشد. فروشنده این کتاب را با دو تخفیف متوالی ٪۱۰ و ٪۲۰ فروخت. قیمت خرید کتاب را حساب کنید.

جواب

درصد پرداختی $\quad ۱۰\% - ۱۰\% = ۹۰\% \Rightarrow ۱۰\%$ تخفیف

درصد پرداختی $\quad ۱۰۰\% - ۲۰\% = ۸۰\% \Rightarrow ۲۰\%$ تخفیف

درصد پرداختی نهایی $\quad \frac{۹۰}{۱۰۰} \times \frac{۸۰}{۱۰۰} = \frac{۷۲۰۰}{۱۰۰۰۰} = ۷۲\%$

قیمت خرید کتاب $\quad \frac{۷۲}{۱۰۰} = \frac{x}{۱۵۰۰۰} \Rightarrow x = \frac{۷۲ \times ۱۵۰۰۰}{۱۰۰} = ۱۰۸۰۰$

نکته ۱۱ (حل مسائل مربوط به تعداد دور چرخ و شعاع (محیط) چرخ): اگر متحرکی دارای دو چرخ با اندازه‌های مختلف باشد، به‌طوری که شعاع (محیط) چرخ کوچک $R_۱$ و تعداد دور آن $N_۱$، شعاع (محیط) چرخ بزرگ $R_۲$ و تعداد دور آن $N_۲$ باشد، بین این چهار مقدار رابطه‌ی زیر برقرار است که برای به‌دست آوردن مقدار یکی از این چهار مجهول نیز از این رابطه استفاده می‌شود:

$$\mathbf{N_۱ R_۱ = N_۲ R_۲}$$

این رابطه از تناسب معکوس بین این چهار مقدار به‌دست آمده است.

مثال ۴۳: دو چرخ از طریق یک تسمه به هم متصل‌اند. شعاع چرخ کوچک ۳۰ سانتی‌متر و شعاع چرخ بزرگ ۴۰ سانتی‌متر است. اگر چرخ بزرگ ۶۰ دور بزند، چرخ کوچک چند دور می‌زند؟

جواب

$R_1 = 30\text{cm} \quad , \quad R_2 = 40\text{cm} \quad , \quad N_2 = 60$ دور

$N_1 R_1 = N_2 R_2 \Rightarrow 30 N_1 = 40 \times 60 \Rightarrow 30 N_1 = 2400 \Rightarrow N_1 = \frac{2400}{30} = 80$ دور

نکته ۱۲ (حل مسائل مربوط به شیرهای آب): اگر شیر A_1 منبعی را در a_1 ساعت، شیر A_2 در a_2 ساعت، شیر A_3 در a_3 ساعت، ... به تنهایی پر کنند و همچنین این منبع شیرهای تخلیه‌ای نیز داشته باشد که شیر B_1 منبع پر را در b_1 ساعت، شیر B_2 منبع پر را در b_2 ساعت، شیر B_3 منبع پر را در b_3 ساعت، ... به‌تنهایی تخلیه کنند و اگر همه‌ی شیرهای آب و تخلیه با هم باز باشند و بخواهیم زمان پر شدن منبع را که برابر t است، به‌دست آوریم، از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{t} = \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{1}{b_3} + \cdots\right)$$

مثال ۴۴: استخری ۳ شیر آب دارد که هریک به تنهایی استخر را در ۴، ۶ و ۸ ساعت پر می‌کنند و این استخر نیز یک شیر تخلیه دارد که استخر پر را در ۲ ساعت خالی می‌کند. اگر همه‌ی شیرها با هم باز باشند، استخر در چند ساعت پر می‌شود؟

جواب

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{t} = \frac{6+4+3-12}{24} \Rightarrow \frac{1}{t} = \frac{1}{24} \Rightarrow t = 24$$

استخر در ۲۴ ساعت پر می‌شود.

نکته ۱۳ (حل مسائل مربوط به سرعت متوسط رفت و برگشت یک متحرک): متحرکی مسیری را با سرعت v_1 می‌پیماید و همان مسیر را با سرعت v_2 برمی‌گردد. سرعت متوسط این متحرک در رفت و برگشت، از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$V_{\text{متوسط}} = \frac{2 v_1 v_2}{v_1 + v_2}$$

مثال ۴۵: اتومبیلی مسیری را با سرعت ۴۰ کیلومتر بر ساعت طی می‌کند و همان مسیر را با سرعت ۶۰ کیلومتر بر ساعت برمی‌گردد. سرعت متوسط این اتومبیل چه‌قدر است؟

جواب

$$v_1 = ۴۰\frac{km}{h} \quad , \quad v_2 = ۶۰\frac{km}{h}$$

$$\text{متوسط } V = \frac{۲\times ۴۰\times ۶۰}{۴۰+۶۰} = \frac{۴۸۰۰}{۱۰۰} = ۴۸\frac{km}{h}$$

نکته ۱۴ (حل مسائل مربوط به اسید و آب): برای این‌که بدانیم به p لیتر الکل m٪ چند لیتر آب اضافه کنیم تا الکل n٪ حاصل شود و مقدار آب اضافه شده را x درنظر بگیریم، از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\mathbf{x = \frac{p\times m}{n}}$$

که این رابطه از تناسب معکوس بین این چهار مقدار به‌دست آمده است. (زیرا با افزایش حجم اسید، درصد آن کاهش می‌یابد.)

مثال ۴۶: به ۱۰ لیتر اسید ۷۵٪ چند لیتر آب اضافه کنیم تا اسید ۵۰٪ به‌دست آید؟

جواب

$$x = \frac{۱۰\times ۷۵}{۵۰} = ۱۵ \quad \text{لیتر آب}$$

تمرین

۱- حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$k=(-۵)+(-۱)+۳+۷+۱۱+\ldots+۳۹۹۵$$

۲- کسر مولد هریک از عددهای اعشاری زیر را بیابید.

الف) $۰/۷۱\overline{۵۳۲}$

ب) $۰/\overline{۶۳}$

ج) $۰/۵\overline{۶۱}$

د) $۰/۲\overline{۳۱}$

۳- حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$۲\div\cfrac{۲+\cfrac{۲+\cfrac{۲+\cfrac{۲+۱}{۱}}{۱}}{۱}}{۲-\cfrac{۱}{۲-\cfrac{۱}{۲-۱}}}=$$

۴- بین دو کسر $\frac{۲۰}{۲۱}$ و $\frac{۲۱}{۲۲}$ پنج کسر بیابید. (به دو روش مختلف)

۵- اگر $\frac{ac-۲bd}{۵ac-bd}=\frac{۳}{۷}$ و $\frac{c}{d}=\frac{۳}{۲}$، مقدار $\frac{a}{b}$ چه‌قدر است؟

توجه

دانش‌آموزان عزیز، برای حل تمرین‌های بیش‌تر می‌توانید به کتاب «تفکر، تمرین، تسلط» مراجعه نمایید.