بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضی پایه نهم دوره اول متوسطه

پـــیــشــرفــتــه

تألیف: دپارتمان متوسطه اول مؤسسه کانون ریاضیدانان زمان

نظارت عالی: علی خزایی

عنوان و نام پدیدآور	: ریاضی پایه نهم دوره اول متوسطه پیشرفته
وضعیت ویراست	: ویراست ۲.
مشخصات نشر	: تهران: مؤسسه کانون ریاضیدانان زمان، ۱۳۹۶.
مشخصات ظاهری	: ۱۷۰ص.؛ ۲۲×۲۹ س‌م.
شابک	: 978-600-7903-97-1
وضعیت فهرست نویسی	: فیپای مختصر
یادداشت	: چاپ دوم.
شناسه افزوده	: خزائی، علی، ۱۳۴۸ -، ناظر
شناسه افزوده	: کانون ریاضیدانان زمان
شماره کتابشناسی ملی	: ۴۸۴۱۱۰۲

نام کتاب: ریاضی پایه نهم دوره اول متوسطه پیشرفته

تألیف: دپارتمان متوسطه اول مؤسسه کانون ریاضیدانان زمان

شابک: ۱_97_۷۹۰۳_۶۰۰_۹۷۸

ISBN:978-600-7903-97-1

نوبت چاپ: چاپ دوم ـ ویراست جدید ـ ۱۳۹۶

تیراژ: ۱۰۰۰ جلد

تعداد صفحات: ۱۷۰ صفحه

قیمت: ۲۴۰۰۰ تومان

ناشر: ریاضیدانان زمان - تلفن مرکز پخش: ۷۵ ۵۵ ۹۵ ۸۸ (۰۲۱)

فروشگاه دائمی: تهران - میدان انقلاب - خیابان کارگر شمالی – نرسیده به بلوار کشاورز - پلاک ۱۵۴۷ - طبقه دوم - واحد ۳۳

پیش‌گفتار

گستردگی و تعمیق دانش ریاضی از سویی و کاربرد وسیع آن در سایر علوم به حدی است که این علم مادر همه علوم لقب گرفته است. وسعت کاربرد این دانش در علوم مختلف از جمله علوم مهندسی، علوم کشاورزی، علوم انسانی، علوم پزشکی، علوم کامپیوتر و ... بر اهمیت فراگیری آن از سوی دانش‌آموزان، دانش‌پژوهان و دانشجویان می‌افزاید. البته یادگیری ریاضیات را می‌توان به دو منظور خلاصه کرد. ضمن تحقق اهداف کاربردی آن و رفع نیازهای زندگی روزمره، باعث پرورش توانایی‌های ذهنی، تقویت قدرت تفکر منطقی، ایجاد و تقویت نظام فکری، افزایش قدرت طبقه‌بندی مفاهیم و آموخته‌های علمی و خلاصه تقویت قدرت برنامه‌ریزی در همه‌ی امور می‌گردد.

یکی از ابزارهای قدرتمند برای تفهیم مفاهیم ریاضیات، استفاده از منابع آموزشی کمک درسی با نگاهی جدید می‌باشد. کانون ریاضیدانان زمان به‌عنوان جامع‌ترین مرکز تخصصی آموزش، نشر و گسترش علم ریاضی، و با هدف ایجاد علاقه نسبت به درس ریاضی برای عموم و با ارائه‌ی روش‌های نوین آموزشی، اقدام به تألیف و چاپ ۸ عنوان کتاب کمک درسی در کلیه‌ی مقاطع تحصیلی نموده است. عناوین و توضیحات این کتاب‌ها به شرح زیر است:

۱) مجموعه کتاب‌های تابستانه: این کتاب‌ها در کلیه‌ی مقاطع تحصیلی تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها در قالب درسنامه‌ی مختصر ولی بسیار مفید و آموزنده به همراه نکات کلیدی، با رویکرد مروری بر گذشته و چشم‌اندازی به آینده (بخشی مربوط به مطالب سال‌های تحصیلی گذشته و بخشی نیز مربوط به سال تحصیلی آینده) است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در فصل تابستان مطالعه شوند.

۲) مجموعه کتاب‌های مقدماتی: این کتاب‌ها در مقاطع ابتدایی و متوسطه اول (راهنمایی) تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها در قالب درسنامه‌ی بسیار کامل همراه با آموزش دقیق مفاهیم ریاضی در سطح مقدماتی براساس مطالب کتاب‌های درسی آموزش و پرورش، ارائه‌ی مثال‌های متنوع همراه با پاسخ تشریحی، ارائه‌ی نکات مهم و کلیدی در جهت تکمیل مطالب و تمرین‌های بدون پاسخ پایان هر فصل است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در طول سال تحصیلی و همراه با کتاب درسی مطالعه شوند.

۳) مجموعه کتاب‌های پیشرفته: این کتاب‌ها در مقاطع ابتدایی و متوسطه اول (راهنمایی) تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها در قالب درسنامه‌ی بسیار کامل همراه با آموزش دقیق مفاهیم ریاضی در سطح پیشرفته و گسترده در ادامه‌ی مطالب کتاب‌های مقدماتی، ارائه‌ی مثال‌های متنوع همراه با پاسخ تشریحی، ارائه‌ی نکات مهم و کلیدی در جهت تکمیل مطالب و تمرین‌های بدون پاسخ پایان هر فصل است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در طول سال تحصیلی و همراه با کتاب درسی و کتاب مقدماتی مطالعه شوند.

۴) مجموعه کتاب‌های جامع: این کتاب‌ها در مقطع متوسطه دوم (دبیرستان) تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها در قالب درسنامه‌ی بسیار کامل همراه با آموزش دقیق مفاهیم ریاضی از سطح مقدماتی تا سطح پیشرفته براساس مطالب کتاب‌های درسی آموزش و پرورش، ارائه‌ی مثال‌های متنوع از سطح مقدماتی تا سطح پیشرفته همراه با پاسخ تشریحی، ارائه‌ی نکات مهم و کلیدی در جهت تکمیل مطالب، سؤالات تشریحی بدون پاسخ و سؤالات چهارگزینه‌ای همراه با پاسخ کلیدی و شگفتی‌های ریاضی در پایان هر فصل است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در طول سال تحصیلی و همراه با کتاب درسی مطالعه شوند.

۵) مجموعه کتاب‌های تیزهوشان: این کتاب‌ها در مقاطع ابتدایی و متوسطه اول (راهنمایی) جهت آمادگی دانش‌آموزان پایه‌ی ششم ابتدایی و پایه‌ی نهم متوسطه اول (راهنمایی) برای آزمون ورودی مدارس تیزهوشان، نمونه دولتی و برتر کشور در قالب درسنامه‌ی تستی همراه با نکات کلیدی و کاربردی در حل تست‌ها و سؤالات چهارگزینه‌ای با عنوان سنجش و ارزشیابی (۱) و (۲) به تألیف و چاپ رسیده‌اند. مطالعه‌ی این کتاب‌ها به دانش‌آموزان پایه‌های پنجم و ششم در مقطع ابتدایی و دانش‌آموزان پایه‌های هشتم و نهم در مقطع متوسطه اول (راهنمایی) پیشنهاد می‌گردد.

۶) مجموعه کتاب‌های موضوعی: این کتاب‌ها بیش‌تر جنبه‌ی تخصصی مباحث ریاضی مقطع متوسطه دوم (دبیرستان) را دارند و شامل درسنامه‌ی کامل، ارائه‌ی مثال‌های متنوع همراه با پاسخ تشریحی، نکات مهم و کاربردی در جهت تکمیل مطالب و تمرین‌های بدون پاسخ پایان هر فصل می‌باشند. این کتاب‌ها اطلاعات دانش‌آموزان را در مباحث مختلف ریاضی مقطع دبیرستان افزایش می‌دهند و باعث تقویت علمی آن‌ها در درس ریاضی و رفع ضعف‌های آن‌ها می‌شوند.

۷) مجموعه کتاب‌های یکی من، یکی تو: این کتاب‌ها در کلیه‌ی مقاطع تحصیلی تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها به این صورت است که یک سؤال همراه با روش حل (یکی من) توسط مؤلف طراحی شده و به دنبال آن، یک سؤال بدون حل (یکی تو) به دانش‌آموز واگذار شده است. سؤالات «یکی من» و «یکی تو» تقریباً مشابه یک‌دیگر هستند و طراحی آن‌ها کاملاً هوشمندانه و هدفمند است. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها در طول سال تحصیلی و به ویژه در ایام امتحانات مطالعه شوند.

۸) مجموعه کتاب‌های «تفکر، تمرین، تسلط»: این کتاب‌ها در کلیه‌ی مقاطع تحصیلی تألیف شده‌اند. نحوه‌ی نگارش آن‌ها به این صورت است که هر فصل از کتاب شامل سه بخش تفکر، تمرین و تسلط می‌باشد. در بخش «تفکر» مفاهیم مورد نیاز فصل و همچنین انتظاراتی که از دانش‌آموز می‌رود، به‌صورت مختصر و مفید بیان شده است؛ در بخش «تمرین» نمونه سؤالات امتحانی متنوعی در دو سطح مقدماتی و پیشرفته در اختیار دانش‌آموز قرار می‌گیرد و در بخش «تسلط» جهت سنجش و ارزشیابی دانش‌آموز، آزمونی از آن فصل به عمل می‌آید. پیشنهاد می‌گردد این کتاب‌ها همراه با کتاب‌های مقدماتی و پیشرفته مطالعه شوند.

امید است معلمین و مدرسین گرامی و همچنین دانش‌آموزان، دانش‌پژوهان و دانشجویان عزیز، پس از مطالعه‌ی کتاب‌های کانون، نظرات و پیشنهادات خود را منعکس نموده و ما را در ادامه‌ی راه یاری نمایند.

کانون ریاضیدانان زمان

مرکز تخصصی آموزش، نشر و گسترش فرهنگ ریاضی

مقدمه

«به نام نامی آفریننده نظام هستی»

حضرت علی (ع):

دانشی که قرین فهم نباشد، نفعی ندارد. خواندنی که توأم با تأمل نباشد، سودمند نیست. عبادتی که بی تفکر باشد، خیری ندارد.

خداوند بزرگ را سپاس می‌گویم که نعمت اندیشیدن را به همگان عطا فرمود تا در پرتو آن، انسان مسیر صحیح زیستن را آموخته و به دیگران نیز بیاموزد.

یکی از راهبردهای مهم یادگیری، آموزش دقیق مفاهیم و انجام تمرین‌های متناسب با اصول یادگیری و تکرار آن است. در این راستا، داشتن منبع مناسب برای یادگیری و درک بیش‌تر و همچنین نمونه سؤالات مناسب و متنوع برای تمرین، می‌تواند یکی از عوامل مهم موفقیت در یادگیری و پیشرفت علمی دانش‌آموزان باشد.

کتابی که در مقابل چشمان جستجوگر شما قرار دارد، بر مبنای نظام آموزشی کانون ریاضیدانان زمان و در جهت تکمیل کتاب‌های زنجیروار آن (تابستانه ← مقدماتی ← پیشرفته) که متناسب با مفاهیم و مطالب کتاب درسی ریاضی پایه نهم دوره اول متوسطه است، همراه با آموزش دقیق مفاهیم ریاضی به شرح زیر گردآوری شده است:

- تدریس در سطح پیشرفته با روشی کلاسیک و دسته‌بندی و تشریح کامل مطالب
- ارائه‌ی نکات مهم و کلیدی در جهت تکمیل مطالب
- ارائه‌ی مثال‌های متنوع همراه با پاسخ تشریحی
- تمرین‌های پایان هر فصل

دپارتمان متوسطه اول

فهرست مطالب

عنوان | **صفحه**

سیمای فصل اول

- **مجموعه‌ها**
  - حل مثال‌های مهم عضویت در یک مجموعه و زیرمجموعه
  - روش به‌دست آوردن تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی از یک مجموعه‌ی n عضوی
  - زیرمجموعه‌های محض (سَره) یک مجموعه
  - مجموعه‌ی توانی یک مجموعه
  - حل مثال‌های مهم نمایش مجموعه‌ها
  - حل مثال‌های مهم مجموعه‌های مساوی
  - تفاضل متقارن دو مجموعه
  - دو مجموعه‌ی جدا از هم (مجزا)
  - تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه‌ی متناهی
  - مجموعه‌ی مرجع
  - متمم یک مجموعه
  - خواص اجتماع و اشتراک دو مجموعه
    - خاصیت جابه‌جایی
    - خاصیت شرکت‌پذیری
    - خاصیت توزیع‌پذیری
  - خواص تفاضل متقارن دو مجموعه
    - خاصیت جابه‌جایی
    - خاصیت شرکت‌پذیری
  - قوانینی در مجموعه‌ها
  - بسته بودن یک مجموعه نسبت به یک عمل
  - حل مثال‌های مهم مجموعه‌ها و احتمال
  - تمرین‌های فصل اول

در کتاب مقدماتی، با مطالب مربوط به این فصل آشنا شدیم. اکنون در ادامه‌ی آن مطالب و در سطح پیشرفته‌تر، به حل مثال‌های مهم و بیان مفاهیم جدیدی می‌پردازیم:

حل مثال‌های مهم عضویت در یک مجموعه و زیرمجموعه:

مثال ۱: اگر $A=\{\{۰\},\varnothing,\{۰,\{۰\}\}\}$، درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) $\{۰\}\in A$ ب) $\{\varnothing\}\subseteq A$ ج) $\{۰,\{۰\}\}\subseteq A$

د) $۰\notin A$ ه) $\{\{۰\}\}\subseteq A$ و) $\varnothing\notin A$

جواب

الف) درست ب) درست ج) نادرست

د) درست ه) درست و) نادرست

مثال ۲: مجموعه‌ی $A=\{۲,\{۳\},b\}$ چند زیرمجموعه دارد؟ آن‌ها را بنویسید.

جواب ازآنجاکه مجموعه‌ی A سه عضوی است، لذا تعداد زیرمجموعه‌های آن برابر است با: $۲^۳=۸$.

اکنون زیرمجموعه‌های این مجموعه را در زیر می‌نویسیم:

$$\{۲\},\{\{۳\}\},\{b\},\{۲,\{۳\}\},\{۲,b\}\{\{۳\},b\},A,\varnothing$$

مثال ۳: همه‌ی زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی $B=\{۵,۵,\{۵,\varnothing\}\}$ را بنویسید.

جواب می‌دانیم عضوهای تکراری در یک مجموعه فقط یک‌بار شمرده می‌شوند. لذا مجموعه‌ی B با مجموعه‌ی $B=\{۵,\{۵,\varnothing\}\}$ برابر است که این مجموعه، یک مجموعه‌ی دو عضوی است و تعداد زیرمجموعه‌های آن برابر است با $۲^۲=۴$. اکنون همه‌ی زیرمجموعه‌های این مجموعه را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\{۵\},\{\{۵,\varnothing\}\},B,\varnothing$$

مثال ۴: مجموعه‌ای ۲۵۶ زیرمجموعه دارد. این مجموعه چند عضو دارد؟

جواب

$$۲^n=۲۵۶ \quad\Rightarrow\quad ۲^n=۲^۸ \quad\Rightarrow\quad n=۸$$

مثال ۵: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $۲k$ عضوی، ۳۲ برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی k عضوی است. مقدار k را به‌دست آورید.

جواب

$$۲^{۲k} = ۳۲ \times ۲^{k} \Rightarrow ۲^{۲k} = ۲^{۵} \times ۲^{k} \Rightarrow ۲^{۲k} = ۲^{k+۵} \Rightarrow ۲k = k + ۵ \Rightarrow k = ۵$$

مثال ۶: تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $n+۳$ عضوی، ۵۶ واحد بیش‌تر از تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی است. مقدار n را به‌دست آورید.

جواب

$$۲^{n+۳} = ۲^{n} + ۵۶ \Rightarrow ۲^{n+۳} - ۲^{n} = ۵۶ \Rightarrow ۲^{n}\left(۲^{۳} - ۱\right) = ۵۶ \Rightarrow ۲^{n} \times ۷ = ۵۶$$

$$\Rightarrow ۲^{n} = ۸ \Rightarrow ۲^{n} = ۲^{۳} \Rightarrow n = ۳$$

نکته ۱: تعداد زیرمجموعه‌های تک عضوی یک مجموعه‌ی n عضوی، n تا می‌باشد.

نکته ۲: تعداد زیرمجموعه‌های n عضوی یک مجموعه‌ی n عضوی، یکی می‌باشد که برابر با خود مجموعه است.

نکته ۳: تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی یک مجموعه‌ی n عضوی، از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{n\left(n-۱\right)}{۲}$$

مثال ۷: مجموعه‌ی $E = \left\{-۲, -۱, \frac{۶}{۲}, ۳, ۵, \frac{۲۰}{۴}\right\}$ را درنظر بگیرید. تعداد زیرمجموعه‌های یک عضوی، دو عضوی و چهار عضوی آن را بیابید.

جواب مجموعه‌ی E با مجموعه‌ی $E = \left\{-۲, -۱, ۳, ۵\right\}$ برابر است که این مجموعه چهار عضو دارد. با توجه به نکته‌های ۹ و ۱۰، تعداد زیرمجموعه‌های تک عضوی آن ۴ تا و تعداد زیرمجموعه‌های چهار عضوی آن یکی می‌باشد که برابر با خود مجموعه‌ی E است. تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی آن برابر است با:

$$\frac{۴\left(۴-۱\right)}{۲} = \frac{۴ \times ۳}{۲} = ۶$$

مثال ۸: یک مجموعه‌ی ۷ عضوی، چند زیرمجموعه‌ی دو عضوی دارد؟

جواب

$$n = ۷ \Rightarrow \frac{۷\left(۷-۱\right)}{۲} = \frac{۷ \times ۶}{۲} = ۲۱$$

یک مجموعه‌ی ۷ عضوی، ۲۱ زیرمجموعه‌ی دو عضوی دارد.

روش به‌دست آوردن تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی از یک مجموعه‌ی n عضوی:

قبل از بیان این روش، لازم است به تعریف فاکتوریل که در سال‌های آینده خواهیم آموخت، بپردازیم:

فاکتوریل:

تعریف حاصل ضرب عددهای طبیعی ۱ تا n را n فاکتوریل می‌نامند که با $n!$ و به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\mathbf{n!=۱\times۲\times۳\times\cdots\times n}$$

مثال ۹: حاصل $۴!$ و $۵!\times۲!$ را بیابید.

جواب

$$۴!=۱\times۲\times۳\times۴=۲۴$$

$$۵!\times۲!=(۱\times۲\times۳\times۴\times۵)\times(۱\times۲)=۱۲۰\times۲=۲۴۰$$

نکته ۴: طبق قرارداد داریم:

$$\mathbf{۰!=۱}\quad,\quad \mathbf{۱!=۱}$$

نکته ۵: همواره داریم:

$$\mathbf{n!=n(n-۱)!=n(n-۱)(n-۲)!=n(n-۱)(n-۲)(n-۳)!=\cdots}$$

مثال ۱۰: کسر $\frac{۷!\times۳!}{۴!\times۶!}$ را ساده کنید.

جواب

$$\frac{۷!\times۳!}{۴!\times۶!}=\frac{۷\times\cancel{۶!}\times\cancel{۳!}}{۴\times\cancel{۳!}\times\cancel{۶!}}=\frac{۷}{۴}$$

بیان روش: برای به‌دست آوردن تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی از یک مجموعه‌ی n عضوی، از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\mathbf{\frac{n!}{(n-k)!\times k!}}$$

مثال ۱۱: تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی از یک مجموعه‌ی ۷ عضوی را به‌دست آورید.

جواب

$$\frac{۷!}{(۷-۳)!\times۳!}=\frac{۷\times\overset{۱}{\cancel{۶}}\times۵\times\overset{۱}{\cancel{۴!}}}{\underset{۱}{\cancel{۴!}}\times\underset{۱}{\cancel{۳}}\times\underset{۱}{\cancel{۲}}\times۱}=۳۵$$

مثال ۱۲: تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی از یک مجموعه‌ی ۶ عضوی را به‌دست آورید.

جواب

$$\frac{۶!}{(۶-۲)!\times ۲!}=\frac{\overset{۳}{\cancel{۶}}\times ۵\times \overset{۱}{\cancel{۴!}}}{\underset{۱}{\cancel{۴!}}\times \underset{۱}{\cancel{۲}}\times ۱}=۱۵$$

زیرمجموعه‌های محض (سَره) یک مجموعه:

تعریف **زیرمجموعه‌های محض یک مجموعه عبارت است از: همه‌ی زیرمجموعه‌های آن مجموعه به‌جز خود مجموعه.**

مثال ۱۳: زیرمجموعه‌های محض مجموعه‌ی $A=\{۲,۵\}$ را بنویسید.

جواب

$$\{۲\},\{۵\},\varnothing$$

نکته ۶: تعداد زیرمجموعه‌های محض یک مجموعه‌ی n عضوی از رابطه‌ی $\mathbf{۲^n-۱}$ به‌دست می‌آید.

مثال ۱۴: تعداد زیرمجموعه‌های محض یک مجموعه برابر با ۱۲۷ است. این مجموعه چند عضو دارد؟

جواب

$$۲^n-۱=۱۲۷ \Rightarrow ۲^n=۱۲۸ \Rightarrow ۲^n=۲^۷ \Rightarrow n=۷$$

مثال ۱۵: تعداد زیرمجموعه‌های محض مجموعه‌ی $F=\left\{\{۲\},\frac{۵}{۳},\{\ \}\right\}$ را بیابید و آن‌ها را بنویسید.

جواب مجموعه‌ی F سه عضو دارد. تعداد زیرمجموعه‌های محض آن برابر است با: $۲^۳-۱=۷$.

اکنون زیرمجموعه‌های محض مجموعه‌ی F را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\{\{۲\}\},\left\{\frac{۵}{۳}\right\},\{\{\ \}\},\left\{\{۲\},\frac{۵}{۳}\right\},\{\{۲\},\{\ \}\},\left\{\frac{۵}{۳},\{\ \}\right\},\varnothing$$

مثال ۱۶: اگر تعداد عضوهای مجموعه‌ی A را دو برابر کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های محض آن برابر با ۶۳ خواهد شد. تعداد عضوهای مجموعه‌ی A را تعیین کنید.

جواب اگر مجموعه‌ی A، n عضو داشته باشد و تعداد عضوهای آن را دو برابر کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های محض آن برابر با $۲^{۲n}-۱$ خواهد بود. لذا داریم:

$$۲^{۲n}-۱=۶۳ \Rightarrow ۲^{۲n}=۶۴ \Rightarrow ۲^{۲n}=۲^{۶} \Rightarrow ۲n=۶ \Rightarrow n=۳$$

مثال ۱۷: اگر $n(A)+n(B)=۸$ و تعداد زیرمجموعه‌های A، چهار برابر تعداد زیرمجموعه‌های B باشد، آن‌گاه تعداد عضوهای مجموعه‌ی A و B را به‌دست آورید.

جواب

$$۲^{n(A)}=۴\times ۲^{n(B)} \Rightarrow ۲^{n(A)}=۲^{۲}\times ۲^{n(B)} \Rightarrow ۲^{n(A)}=۲^{n(B)+۲}$$

$$\Rightarrow n(A)=n(B)+۲ \Rightarrow n(A)-n(B)=۲$$

اکنون داریم:

$$\begin{cases} n(A)\cancel{+n(B)}=۸ \\ n(A)\cancel{-n(B)}=۲ \end{cases}$$

$$۲n(A)=۱۰ \Rightarrow n(A)=۵ \qquad (۱)$$

$$n(A)+n(B)=۸ \overset{(۱)}{\Rightarrow} ۵+n(B)=۸ \Rightarrow n(B)=۳$$

مجموعه‌ی توانی یک مجموعه:

تعریف **مجموعه‌ی شامل تمام زیرمجموعه‌های یک مجموعه را مجموعه‌ی توانی آن مجموعه می‌نامند. مجموعه‌ی توانی مجموعه‌ی A را با $P(A)$ نمایش می‌دهند.**

مثال ۱۸: مجموعه‌ی توانی هریک از مجموعه‌های زیر را بنویسید.

الف) $A=\{-۴,\{۳/۲\}\}$

جواب

$$P(A)=\{\{-۴\},\{\{۳/۲\}\},\{-۴,\{۳/۲\}\},\varnothing\}$$

ب) $B=\{۰,\{۰\},\{\varnothing\}\}$

جواب

$$P(B)=\{\{۰\},\{\{۰\}\},\{\{\varnothing\}\},\{۰,\{۰\}\}\{۰,\{\varnothing\}\},\{\{۰\},\{\varnothing\}\},\{۰,\{۰\},\{\varnothing\}\},\varnothing\}$$

نکته ۷: اگر مجموعه‌ی A یک مجموعه‌ی n عضوی باشد، مجموعه‌ی $P(A)$ دارای ۲^{n} عضو خواهد بود.

مثال ۱۹: اگر $A=\{\{-۵\},\{\{\varnothing\}\}\}$، حاصل $n(P(A))$ و $n(P(P(A)))$ را بیابید.

جواب تعداد عضوهای مجموعه‌ی A برابر با ۲ است. اکنون داریم:

$n\left(P\left(A\right)\right)=۲^{۲}=۴ \quad , \quad n\left(P\left(P\left(A\right)\right)\right)=۲^{۴}=۱۶$

مثال ۲۰: اگر $D=\left\{\varnothing,\{۲\},\left\{\frac{۶}{۳},۲,۲\right\},\{\varnothing\}\right\}$، $P\left(D\right)$، $n\left(P\left(D\right)\right)$ و $n\left(P\left(P\left(D\right)\right)\right)$ را به‌دست بیاورید.

جواب مجموعه‌ی D با مجموعه‌ی $D=\left\{\varnothing,\{۲\},\{\varnothing\}\right\}$ برابر است. اکنون داریم:

$$P\left(D\right)=\left\{\{\varnothing\},\{\{۲\}\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{۲\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\{\{۲\},\{\varnothing\}\},D,\varnothing\right\}$$

$$n\left(P\left(D\right)\right)=۸ \qquad , \qquad n\left(P\left(P\left(D\right)\right)\right)=۲^{۸}=۲۵۶$$

حل مثال‌های مهم نمایش مجموعه‌ها:

مثال ۲۱: مجموعه‌ی توان‌های صحیح عدد ۳ را با علائم ریاضی و نوشتن عضوها نمایش دهید.

جواب

$$\left\{۳^{x} \mid x\in\mathbb{Z}\right\}=\left\{\dots,۳^{-۲},۳^{-۱},۳^{۰},۳^{۱},۳^{۲},\dots\right\}$$

مثال ۲۲: مجموعه‌های زیر را با علائم ریاضی بنویسید.

الف) $A=\left\{۰/۳,۰/۰۳,۰/۰۰۳,\dots\right\}$

جواب

$$A=\left\{\frac{۳}{۱۰^{k}} \mid k\in\mathbb{N}\right\}$$

ب) $B=\left\{۱,۲,۳,۴,۶,۸,۱۲,۲۴\right\}$

جواب

$$B=\left\{x \mid x\in\mathbb{N},\frac{۲۴}{x}\in\mathbb{N}\right\}$$

ج) $C=\left\{۲,۵,۸,۱۱,\dots,۶۲\right\}$

جواب

$$C=\left\{۳k+۲ \mid k\in\mathbb{I},k\le ۲۰\right\}$$

د) $D=\left\{۲,۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۴},\dots\right\}$

جواب

$$D=\left\{۲^{x} \mid x\in\mathbb{Z} \,,\, x\le ۱\right\}$$

ه) $E=\left\{\dots,-۸,-۴,۰,۴,۸\right\}$

جواب

$$E=\left\{۴x \mid x\in\mathbb{Z}\right\}$$

ه) $F=\left\{-۴۲,-۳۶,-۳۰,\dots,۲۴\right\}$

جواب

$$F=\{6k \mid k\in\mathbb{Z}, -7\le k\le 4\}$$

ز) $G=\left\{\frac{-1}{2},0,\frac{1}{2},\frac{2}{5},\frac{3}{10},\dots\right\}$

جواب

$$G=\left\{\frac{x}{x^2+1} \mid x\in\mathbb{Z}\ ,\ x\ge -1\right\}$$

مثال ۲۳: هریک از مجموعه‌های زیر را با نوشتن عضوها مشخص کنید.

الف) $A=\left\{\frac{1}{x} \mid x\in N\ ,\ x<5\right\}$

جواب

$$A=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right\}$$

ب) $B=\{4x \mid x\in\mathbb{Z}\ ,\ -2<x<2\}$

جواب

$$B=\{-4,0,4\}$$

ج) $C=\left\{\frac{x^2}{1+x^2} \mid x\in\mathbb{Z}\ ,\ -1<x<3\right\}$

جواب

$$C=\left\{0,\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right\}$$

مثال ۲۴: مجموعه‌های زیر را با علائم ریاضی بنویسید.

الف) $A=\{2,4,8,16,32,\dots\}$

جواب

$$A=\{2^x \mid x\in\mathbb{N}\}$$

ب) $B=\{3,6,9,12,15,18\}$

جواب

$$B=\{3x \mid x\in\mathbb{N}\ ,\ x\le 6\}$$

مثال ۲۵: هریک از مجموعه‌های زیر را با نماد ریاضی بنویسید و با نوشتن عضوها، آن‌ها را مشخص کنید.

الف) مجموعه‌ی عددهای صحیحی که دو برابر آن‌ها بزرگ‌تر از ۴− و کوچک‌تر از ۵ است.

جواب

نمایش مجموعه با نماد ریاضی: $\{x \mid x \in \mathbb{Z} , -4 < 2x < 5\}$

نمایش مجموعه با نوشتن عضوها: $\{-1, 0, 1, 2\}$

ب) مجموعه‌ی عددهای صحیحی که قدرمطلق آن‌ها برابر با ۲ است.

جواب

نمایش مجموعه با نماد ریاضی: $\{x \mid x \in \mathbb{Z} , |x| = 2\}$

نمایش مجموعه با نوشتن عضوها: $\{-2, 2\}$

مثال ۲۶: متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌ی $A = \{4n \mid n \in \mathbb{N}\}$ را مشخص کنید.

جواب داریم: $A = \{4, 8, 12, \dots\}$. چون عضو انتهای مجموعه‌ی A را نمی‌توان مشخص کرد، پس این مجموعه، نامتناهی است.

مثال ۲۷: مجموعه‌های زیر را با نوشتن عضوها مشخص کنید.

الف) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z} , x^2 < 17\}$

جواب

$A = \{-4, -3, \dots, 4\}$

ب) $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} , \sqrt{-x} \in \mathbb{N}\}$

جواب

$B = \{-1, -4, -9, \dots\}$

ج) $C = \left\{\dfrac{x-1}{x^2+2} \mid x \in \mathbb{Z} , -2 \le x , x < 4\right\}$

جواب

$C = \left\{\dfrac{-3}{6}, \dfrac{-2}{3}, \dfrac{-1}{2}, \dfrac{0}{3}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{2}{11}\right\}$

د) $D = \{2x^2 + 1 \mid x \in \mathbb{I} , x^3 < 125\}$

جواب

$D = \{1, 3, 9, 19, 33\}$

مثال ۲۸: تعداد عضوهای هریک از مجموعه‌های زیر را بنویسید.

الف) $A=\left\{x \mid x \in \mathbb{N}, ۱۰ \leq x^{۲}, x^{۲}<۵۷\right\}$

جواب باید x هایی که در رابطه‌ی داده شده در مجموعه‌ی A صدق می‌کنند را پیدا کنیم.

$$۱۰ \leq x^{۲}, x^{۲}<۵۷ \Rightarrow ۱۰<x^{۲}<۵۷ \Rightarrow \sqrt{۱۰}<\sqrt{x^{۲}}<\sqrt{۵۷} \Rightarrow ۳/۱<x<۷/۵$$

با توجه به نامساوی به‌دست آمده، نمایش مجموعه‌ی A با نوشتن عضوها به‌صورت زیر است:

$$A=\{۴,۵,۶,۷\}$$

بنابراین داریم: $n(A)=۴$.

ب) $B=\left\{x^{۳}-۲ \mid x \in \mathbb{Z}, x^{۲}<۵\right\}$

جواب باید x هایی که در رابطه‌ی داده شده در مجموعه‌ی B صدق می‌کنند را پیدا کنیم.

$$x^{۲}<۵ \Rightarrow -\sqrt{۵}<x^{۲}<+\sqrt{۵} \Rightarrow -۲/۱<x<+۲/۱$$

با توجه به نامساوی اخیر، x های موردنظر عبارتند از: $-۲,-۱,۰,۱,۲$. اکنون این x ها را در عبارت $x^{۳}-۲$ قرار می‌دهیم تا عضوهای مجموعه‌ی B ساخته شود. لذا داریم:

$$B=\{-۱۰,-۳,-۲,-۱,۶\}$$

بنابراین داریم: $n(B)=۵$.

حل مثال‌های مهم مجموعه‌های مساوی:

نکته ۸: ممکن است دو مجموعه با دو روش مختلف از نمایش‌های یک مجموعه مشخص شده باشند، ولی عضوهای یکسانی داشته باشند. در این حالت نیز می‌گوییم دو مجموعه با هم مساوی‌اند.

مثال ۲۹: جواد و حسین هر دو در یک مدرسه و در یک کلاس درس می‌خوانند. آیا مجموعه‌ی معلمین جواد با مجموعه‌ی معلمین حسین مساوی است؟

جواب بله. ازآنجاکه جواد و حسین، هر دو در یک مدرسه و در یک کلاس درس می‌خوانند، لذا معلمین آن‌ها با هم یکسان است.

مثال ۳۰: آیا مجموعه‌ی عددهای اول یک رقمی با مجموعه‌ی عددهای فرد یک رقمی مساوی است؟

جواب ابتدا عضوهای دو مجموعه را می‌نویسیم:

مجموعه‌ی عددهای اول یک رقمی $= \{۲,۳,۵,۷\}$

مجموعه‌ی عددهای فرد یک رقمی $= \{۱,۳,۵,۷,۹\}$

همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، دو مجموعه‌ی داده شده با هم مساوی نیستند.

مثال ۳۱: مجموعه‌ی انسان‌هایی که در کره‌ی ماه زندگی می‌کنند، مساوی با کدام مجموعه است؟

جواب ازآنجاکه در کره‌ی ماه، هیچ انسانی زندگی نمی‌کند، لذا پاسخ مسئله، مجموعه‌ی تهی است.

مثال ۳۲: دو مجموعه‌ی $A = \{۷, x, -y\}$ و $B = \{۷, -۲, ۵\}$ مساوی هستند. مقدار xy را به‌دست آورید.

جواب

$$\begin{cases} x = -۲ \\ -y = ۵ \quad \Rightarrow \quad y = -۵ \end{cases} \quad \Rightarrow \quad xy = (-۲) \times (-۵) = ۱۰$$

مثال ۳۳: اگر دو مجموعه‌ی $A = \{۲,۳,\{a-b,۱\}\}$ و $B = \{\{۱\},۲,a+b\}$ با هم مساوی باشند، مقدارهای a و b را به‌دست آورید.

جواب

$$\begin{cases} a - b = ۱ \\ a + b = ۳ \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = ۲ \;,\; b = ۱$$

مثال ۳۴: دو مجموعه‌ی $A = \{۲,۴,a,b+۴\}$ و $B = \{۴,۵,c\}$ با هم مساوی‌اند و مجموعه‌ی B، سه عضوی است. اگر a، b و c عددهای طبیعی باشند، مقدار آن‌ها را به‌دست آورید.

جواب

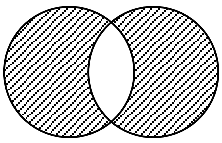
$$\begin{cases} a = ۴ \\ b + ۴ = ۵ \quad \Rightarrow \quad b = ۱ \\ c = ۲ \end{cases}$$

تفاضل متقارن دو مجموعه:

دو مجموعه‌ی A و B را درنظر بگیرید. مجموعه‌ی عناصری که دقیقاً به یکی از دو مجموعه‌ی A یا B تعلق داشته باشند، تفاضل متقارن دو مجموعه‌ی A و B نامیده می‌شود و آن را با $A\Delta B$ نمایش می‌دهند که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)}$$

نمودار وِن تفاضل متقارن دو مجموعه‌ی A و B به‌صورت زیر است:



$A\Delta B$

نکته ۹: با توجه به نمودار بالا داریم:

$$\mathbf{A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)}$$

مثال ۳۵: اگر داشته باشیم $A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و $B=\{۲,۴,۶,۸,۱۰\}$، مجموعه‌ی $A\Delta B$ را مشخص کنید.

جواب

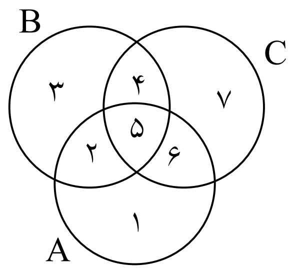
$$A-B=\{۱,۳,۵\}$$
$$B-A=\{۸,۱۰\}$$
$$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)=\{۱,۳,۵,۸,۱۰\}$$

مثال ۳۶: دو مجموعه‌ی $A=\{x\mid x\in\mathbb{Z}\ ,\ x<۴\}$ و $B=\{x\mid x\in\mathbb{N}\ ,\ x<۴\}$ را درنظر بگیرید. مجموعه‌های $A\cap B$، $A\cup B$ و $A\Delta B$ را با عضوها مشخص کنید.

جواب

$$A=\{\dots,-۱,۰,۱,۲,۳\}\quad,\quad B=\{۱,۲,۳\}$$
$$A\cap B=\{۱,۲,۳\}\quad,\quad A\cup B=\{\dots,-۱,۰,۱,۲,۳\}=A$$
$$A\Delta B=(A\cup B)-(A\cap B)=A-\{۱,۲,۳\}=\{\dots,-۱,۰\}$$

مثال ۳۷: با توجه به شکل، کدام‌یک از مجموعه‌های زیر، نشان‌دهنده‌ی $(A-B)\cup(B\cap C)$ است؟



۱) $\{۱,۶\}$ ۲) $\{۱,۲,۳,۴,۶\}$

۳) $\{۱,۴,۵,۶\}$ ۴) $\{۲,۴,۵,۶\}$

جواب گزینه (۳) صحیح است. زیرا:

$$A-B=\{۱\,,\,۶\}$$

$$B\cap C=\{۴\,,\,۵\}$$

$$(A-B)\cup(B\cap C)=\{۱\,,\,۴\,,\,۵\,,\,۶\}$$

مثال ۳۸: اگر $\mathbb{N}$، $\mathbb{I}$، O و E به‌ترتیب مجموعه‌ی عددهای طبیعی، مجموعه‌ی عددهای حسابی، مجموعه‌ی عددهای طبیعی فرد و مجموعه‌ی عددهای طبیعی زوج باشند، حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $(\mathbb{I}-\mathbb{N})\cap(O\cup E)$

جواب

$$(\mathbb{I}-\mathbb{N})\cap(O\cup E)=\{۰\}-\mathbb{N}=\varnothing$$

ب) $\mathbb{I}\Delta E$

جواب

$$\mathbb{I}\Delta E=(I-E)\cup(E-\mathbb{I})=\{۰,۱,۳,۵,\ldots\}\cup\varnothing=\{۰,۱,۳,۵,\ldots\}$$

ج) $(O\cap E)\cup(\mathbb{I}-\mathbb{N})$

جواب

$$(O\cap E)\cup(\mathbb{I}-\mathbb{N})=\varnothing\cup\{۰\}=\{۰\}$$

مثال ۳۹: اگر $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x<۳/۵\}$ و $B=\{x\in\mathbb{R}\mid -۸\le x\le ۳\}$، مجموعه‌های $A\cap B$، $A\cup B$ و $A-B$ را با علائم ریاضی بنویسید.

جواب

$$A\cap B=\{x\in\mathbb{R}\mid -۸\le x\le ۳\}$$

$$A\cup B=\{x\in\mathbb{R}\mid x<۳/۵\}$$

$$A-B=\{x\in\mathbb{R}\mid ۳<x<۳/۵\,,\,x<-۸\}$$

دو مجموعه‌ی جدا از هم (مجزا):

تعریف **دو مجموعه‌ی ناتهی که اشتراکشان تهی باشد، دو مجموعه‌ی جدا از هم (مجزا) نامیده می‌شوند. یعنی:**

$$\mathbf{A \neq \varnothing \quad , \quad B \neq \varnothing \quad \Rightarrow \quad A \cap B = \varnothing}$$

مثال **۴۰:** آیا دو مجموعه‌ی $A = \{۱,۲,۳\}$ و $B = \{۴,۵\}$ جدا از هم هستند؟

جواب بله. زیرا دو مجموعه‌ی A و B ناتهی هستند، ولی اشتراکشان تهی است.

مثال **۴۱:** سه مجموعه‌ی A، B و C مثال بزنید که A و B جدا از هم، B و C جدا از هم و A و C نیز جدا از هم باشند.

جواب

$$A = \{۵,۶,۷\} \quad , \quad B = \{۱,۲,۳\} \quad , \quad C = \{۴,۸\}$$

تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه‌ی متناهی:

اگر A و B دو مجموعه‌ی متناهی باشند، در این صورت:

الف) اگر $\mathbf{A \cap B \neq \varnothing}$، در این صورت داریم:

$$\mathbf{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$$

ب) اگر $\mathbf{A \cap B = \varnothing}$، در این صورت داریم:

$$\mathbf{n(A \cup B) = n(A) + n(B)}$$

مثال **۴۲:** در یک گروه ۴۰ نفری، ۳۲ نفر به تئاتر و ۲۷ نفر به موسیقی علاقه‌مند هستند. در این گروه چند نفر هم به تئاتر و هم به موسیقی علاقه‌مند هستند؟

جواب مجموعه‌ی افرادی که به تئاتر علاقه‌مند هستند را با A و مجموعه‌ی افرادی که به موسیقی علاقه‌مند هستند را با B نمایش می‌دهیم. لذا داریم:

$$n(A) = ۳۲ \quad , \quad n(B) = ۲۷$$
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$
$$۴۰ = ۳۲ + ۲۷ - n(A \cap B) \quad \Rightarrow \quad n(A \cap B) = ۱۹$$

نکته **۱۰:** اگر A و B دو مجموعه‌ی متناهی باشند، داریم:

$$\mathbf{n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)}$$

مثال **۴۳:** نکته ۱۰ را ثابت کنید.

جواب مجموعه‌ی A را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم:

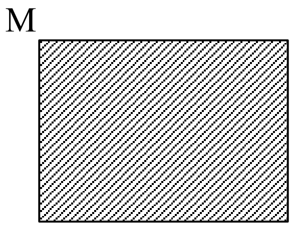
$$A=(A-B)\cup(A\cap B)$$

از طرفی می‌دانیم دو مجموعه‌ی $A-B$ و $A\cap B$ جدا از هم هستند. لذا داریم:

$$n(A)=n\left[(A-B)\cup(A\cap B)\right]=n(A-B)+n(A\cap B) \quad\Rightarrow\quad n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$$

مجموعه‌ی مرجع:

تعریف **در هر بحث معین، از اشیایی صحبت می‌شود که همه‌ی این اشیاء، عضوهای یک مجموعه به نام مجموعه‌ی مرجع می‌باشند. در واقع این مجموعه، عالم بحث را مشخص می‌کند. مجموعه‌ی مرجع را با U یا M نمایش می‌دهند. همچنین در نمودار وِن، مجموعه‌ی مرجع را با مستطیل مشخص می‌کنند.**

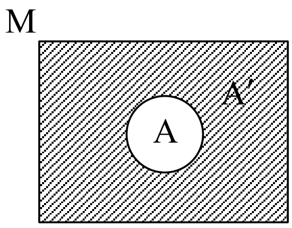


متمم یک مجموعه:

تعریف **مجموعه‌ی عضوهایی از M که متعلق به مجموعه‌ی A نباشند، متمم مجموعه‌ی A نامیده می‌شود و با A' یا A^c نمایش داده می‌شود. مجموعه‌ی A' به‌صورت زیر تعریف می‌شود:**

$$\mathbf{A'=\{x \mid x\in M\ ,\ x\notin A\}}$$

نمودار وِن متمم مجموعه‌ی A به‌صورت زیر است:



نکته ۱۱: همواره داریم: $\mathbf{A\cap A'=\varnothing}$

نکته ۱۲: متممِ متمم یک مجموعه، با خود آن مجموعه برابر است. یعنی: $\mathbf{(A')'=A}$

نکته ۱۳: همواره داریم: $\mathbf{M'=\varnothing \ , \ \varnothing'=M}$

نکته ۱۴: اگر $A \subseteq B$، آن‌گاه $B' \subseteq A'$.

نکته ۱۵: متمم‌های دو مجموعه‌ی مساوی، با هم مساوی‌اند.

مثال ۴۴: اگر $M=\{۱,۲,...,۲۰\}$ مجموعه‌ی مرجع و A مجموعه‌ی مضرب‌های عدد ۳ باشد و داشته باشیم $A \subseteq M$، مجموعه‌ی A' را با نوشتن عضوها مشخص کنید.

جواب

$$A=\{۳,۶,۹,۱۲,۱۵,۱۸\}$$

$$A'=\{۱,۲,۴,۵,۷,۸,۱۰,۱۱,۱۳,۱۴,۱۶,۱۷,۱۹,۲۰\}$$

مثال ۴۵: اگر $M=\{۷k \mid k \in \mathbb{N}\}$ و $A=\{۱۴k \mid k \in \mathbb{N}\}$، آن‌گاه مجموعه‌ی A' را با نوشتن عضوها و علائم ریاضی مشخص کنید.

جواب

$$M=\{۷,۱۴,۲۱,۲۸,...\}$$

$$A=\{۱۴,۲۸,۴۲,۵۶,...\}$$

$$A'=\{۷,۲۱,۳۵,۴۹,...\}=\{۱۴k-۷ \mid k \in \mathbb{N}\}$$

خواص اجتماع و اشتراک دو مجموعه:

در اجتماع و اشتراک دو مجموعه، سه خاصیت وجود دارد:

الف) خاصیت جابه‌جایی (تعویض‌پذیری): برای دو مجموعه‌ی A و B داریم:

$$\mathbf{A\cup B=B\cup A \quad , \quad A\cap B=B\cap A}$$

ب) خاصیت شرکت‌پذیری (انجمنی): برای سه مجموعه‌ی A، B و C داریم:

$$\mathbf{A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C \quad , \quad A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C}$$

ج) خاصیت پخشی (توزیع‌پذیری): برای سه مجموعه‌ی A، B و C داریم:

$$\mathbf{A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)}$$

$$\mathbf{A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)}$$

مثال ۴۶: درستی خاصیت پخشی را با مثال بررسی کنید.

جواب فرض می‌کنیم: $A=\{۲,۴,۵,۶\}$ و $B=\{۱,۲,۳,۴,۷\}$ و $C=\{۳,۴,۵,۸\}$

حالت اول:

$$A\cup(B\cap C)=\{۲,۴,۵,۶\}\cup\{۳,۴\}=\{۲,۳,۴,۵,۶\} \qquad (۱)$$

$$(A\cup B)\cap(A\cup C)=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}\cap\{۲,۳,۴,۵,۶,۸\}=\{۲,۳,۴,۵,۶\} \qquad (۲)$$

$$(۱)=(۲) \Rightarrow A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

حالت دوم:

$$A\cap(B\cup C)=\{۲,۴,۵,۶\}\cap\{۱,۲,۳,۴,۵,۷,۸\}=\{۲,۴,۵\} \qquad (۱)$$

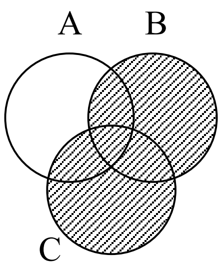
$$(A\cap B)\cup(A\cap C)=\{۲,۴\}\cup\{۴,۵\}=\{۲,۴,۵\} \qquad (۲)$$

$$(۱)=(۲) \Rightarrow A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

مثال ۴۷: درستی خاصیت شرکت‌پذیری را با نمودار وِن بررسی کنید.

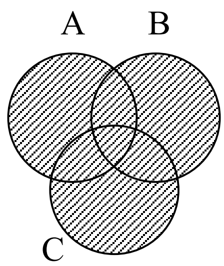
جواب

حالت اول:

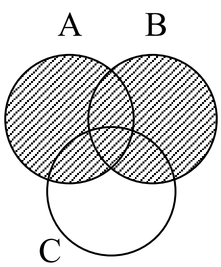


$B\cup C$

$\Rightarrow$

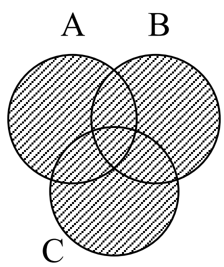


$A\cup(B\cup C)$ (۱)



$A\cup B$

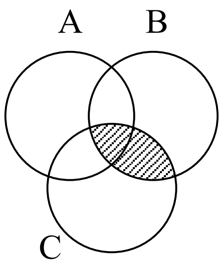
$\Rightarrow$



$(A\cup B)\cup C$ (۲)

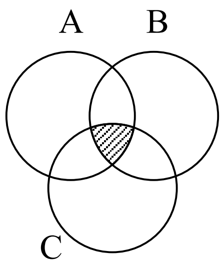
$$(۱)=(۲) \Rightarrow A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$$

حالت دوم:



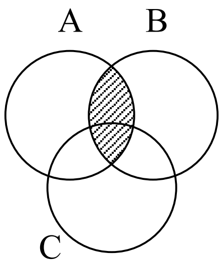
$B \cap C$

$\Rightarrow$



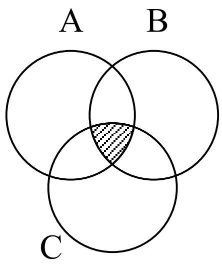
$A \cap (B \cap C)$

(۱)



$A \cap B$

$\Rightarrow$



$(A \cap B) \cap C$

(۲)

$$(۱) = (۲) \quad \Rightarrow \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

خواص تفاضل متقارن دو مجموعه:

در تفاضل متقارن دو مجموعه، دو خاصیت وجود دارد:

الف) خاصیت جابه‌جایی (تعویض‌پذیری): برای دو مجموعه‌ی A و B داریم:

$$A \Delta B = B \Delta A$$

ب) خاصیت شرکت‌پذیری (انجمنی): برای سه مجموعه‌ی A، B و C داریم:

$$A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$$

مثال ۴۸: خاصیت جابه‌جایی در تفاضل متقارن دو مجموعه را ثابت کنید.

جواب

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (B - A) \cup (A - B) = B \Delta A$$

قوانینی در مجموعه‌ها:

تعریف **دسته قوانین کلی و پایه‌ای را که برای همه‌ی مجموعه‌ها برقرار است، قوانین مجموعه‌ها می‌نامند. این قوانین، بیش‌تر به‌صورت برابری‌هایی هستند که همواره صحیح می‌باشند و برای اثبات آن‌ها از نمودار وِن یا تعریف استفاده می‌کنیم.**

این قوانین عبارتند از:

قوانین اجتماع

$$۱)\begin{cases} A \cup \varnothing = A \\ A \cup A = A \\ A \cup M = M \\ A \cup A' = M \end{cases}$$

قوانین اشتراک

$$۲)\begin{cases} A \cap \varnothing = \varnothing \\ A \cap A = A \\ A \cap M = A \\ A \cap A' = \varnothing \end{cases}$$

قوانین تفاضل

$$۳)\begin{cases} A - \varnothing = A \\ \varnothing - A = \varnothing \\ A - A = \varnothing \\ A - M = \varnothing \\ M - A = A' \\ A - A' = A \end{cases}$$

قوانین تفاضل متقارن

$$۴)\begin{cases} A \Delta \varnothing = A \\ A \Delta A = \varnothing \\ A \Delta M = A' \\ A \Delta A' = M \end{cases}$$

قوانین جذب

$$۵)\begin{cases} A \cup (A \cap B) = A \\ A \cap (A \cup B) = A \end{cases}$$

قوانین دمورگان

$$۶)\begin{cases} (A \cup B)' = A' \cap B' \\ (A \cap B)' = A' \cup B' \end{cases}$$

قوانین زیرمجموعه در اجتماع

$$۷)\begin{cases} A \subseteq (A \cup B) \\ B \subseteq (A \cup B) \\ (A \cap B) \subseteq (A \cup B) \end{cases}$$

قوانین زیرمجموعه در اشتراک

$$۸)\begin{cases} (A \cap B) \subseteq A \\ (A \cap B) \subseteq B \\ (A \cap B) \subseteq (A \cup B) \end{cases}$$

قوانین زیرمجموعه در تفاضل

$$۹)\begin{cases} A - B \subseteq A \\ B - A \subseteq B \end{cases}$$

$$۱۰)\ A \subseteq B \Leftrightarrow \begin{cases} A \cup B = B \\ A \cap B = A \end{cases}$$

$$۱۱)\ A \subseteq B \Rightarrow \begin{cases} (A \cap C) \subseteq (B \cap C) \\ (A \cup C) \subseteq (B \cup C) \end{cases}$$

۱۲) $A = B \Rightarrow \begin{cases} A \cap C = B \cap C \\ A \cup C = B \cup C \end{cases}$

۱۳) $A = B \, , \, C = D \Rightarrow \begin{cases} A \cup C = B \cup D \\ A \cap C = B \cap D \end{cases}$

۱۴) $A \Delta B = A \Delta C \Rightarrow B = C$

۱۵) $A \Delta B = \varnothing \Rightarrow A = B$

مثال ۴۹: قانون ۱۵ را ثابت کنید.

جواب

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \varnothing \quad \Rightarrow \quad (A - B = \varnothing \, , \, B - A = \varnothing) \quad \Rightarrow$$
$$A \subseteq B \, , \, B \subseteq A \quad \Rightarrow \quad A = B$$

مثال ۵۰: قانون ۴ را ثابت کنید.

جواب

اثبات $A \Delta \varnothing = A$:
$$A \Delta \varnothing = (A - \varnothing) \cup (\varnothing - A) = A \cup \varnothing = A$$
اثبات $A \Delta A = \varnothing$:
$$A \Delta A = (A - A) \cup (A - A) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$$
اثبات $A \Delta M = A'$:
$$A \Delta M = (A - M) \cup (M - A) = \varnothing \cup A' = A'$$
اثبات $A \Delta A' = M$:
$$A \Delta A' = (A - A') \cup (A' - A) = A \cup A' = M$$

مثال ۵۱: قوانین جذب (قانون ۵) را ثابت کنید.

جواب

اثبات $A \cup (A \cap B) = A$:
$$A \cup (A \cap B) = (A \cap M) \cup (A \cap B) = A \cap (M \cup B) = A \cap M = A$$
اثبات $A \cap (A \cup B) = A$:
$$A \cap (A \cup B) = (A \cup \varnothing) \cap (A \cup B) = A \cup (\varnothing \cap B) = A \cup \varnothing = A$$

نکته ۱۶: اگر A و B دو زیرمجموعه از مجموعه‌ی مرجع M باشند، داریم:
$$A - B = A \cap B'$$

مثال ۵۲: ثابت کنید اگر A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم باشند، آن‌گاه $A \cap B' = A$.

جواب ازآنجاکه A و B دو مجموعه‌ی جدا از هم هستند، لذا $A \cap B = \varnothing$. بنابراین:

$$A \cap B' = (A \cap B') \cup \varnothing = (A \cap B') \cup (A \cap B) = A \cap (B' \cup B) = A \cap M = A$$

نکته ۱۷: خاصیت تعدی (ترایایی) که برای هر سه مجموعه‌ی دلخواه A، B و C برقرار است، به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\mathbf{A \subseteq B \,,\, B \subseteq C \quad \Rightarrow \quad A \subseteq C}$$

مثال ۵۳: نکته ۱۷ را ثابت کنید.

جواب

$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \\ B \subseteq C \Leftrightarrow B \cap C = B \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$A = A \cap B = A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap C \quad \Rightarrow \quad A \subseteq C$$

مثال ۵۴: اگر داشته باشیم $M = \{۱,۲,۳,\dots,۳۰\}$، $A = \left\{x \mid \frac{۲۴}{x} \in M\right\}$ و $B = \left\{x \mid \frac{x-۱}{۲} \in M\right\}$، حاصل $M \Delta B$ و $A' \cap B'$ را به‌دست آورید.

جواب

$$A = \{۱,۲,۳,۴,۶,۸,۱۲,۲۴\} \qquad , \qquad B = \{۳,۵,۷,۹,\dots,۲۹\}$$

$$M \Delta B = (M - B) \cup (B - M) = B' \cup \varnothing = B'$$

$$A' \cap B' = (A \cup B)' = \{۱۰,۱۴,۱۶,۱۸,۲۰,۲۲,۲۶,۲۸,۳۰\}$$

مثال ۵۵: با استفاده از قوانین مجموعه‌ها ثابت کنید:

$$(A \cup B) - (B \cup C) = (A - B) - C$$

جواب

$$(A \cup B) - (B \cup C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)' = (A \cup B) \cap (B' \cap C') =$$

$$[(A \cup B) \cap B'] \cap C' = [(A \cap B') \cup (B \cap B')] \cap C' = [(A \cap B') \cup \varnothing] \cap C' = (A \cap B') \cap C' =$$

$$(A - B) - C$$

مثال ۵۶: به کمک قوانین مجموعه‌ها ثابت کنید:

$$A - (B \cup C) = (A - B) - C$$

جواب

$$A - (B \cup C) = A \cap (B \cup C)' = A \cap (B' \cap C') = (A \cap B') \cap C' = (A - B) - C$$

بسته بودن یک مجموعه نسبت به یک عمل:

تعریف **مجموعه‌ی A را درنظر می‌گیریم. اگر عمل $*$ در این مجموعه تعریف شده باشد، مجموعه‌ی A را نسبت به عمل $*$ بسته می‌نامند در صورتی که اگر هر دو عضو دلخواه a و b از مجموعه‌ی A را درنظر بگیریم، $a*b$ نیز متعلق به مجموعه‌ی A باشد.**

مثال **۵۷:** بررسی کنید که مجموعه‌ی عددهای گویا نسبت به کدام‌یک از چهار عمل اصلی بسته است؟

جواب مجموعه‌ی عددهای گویا نسبت به جمع، تفریق و ضرب بسته است. زیرا حاصل جمع، حاصل تفریق و حاصل ضرب هر دو عدد گویا، عددی گویا است. ولی نسبت به تقسیم بسته نیست. به‌عنوان مثال، تقسیم عدد ۲ بر صفر، عددی گویا نیست. (تعریف نشده است.)

مثال **۵۸:** بسته بودن مجموعه‌ی $A=\left\{۲x^{۳}+۵ \mid x\in\mathbb{Z}\right\}$ را نسبت به چهار عمل اصلی بررسی کنید.

جواب مجموعه‌ی A را با عضوها مشخص می‌کنیم. لذا داریم:

$$A=\{\dots,-۱۱,۳,۵,۷,۲۱,\dots\}$$

مجموعه‌ی A نسبت به هیچ‌یک از چهار عمل اصلی بسته نیست. زیرا:

$$۳+۷=۱۰\notin A$$
$$-۱۱\times ۳=-۳۳\notin A$$
$$۷-۳=۴\notin A$$
$$۳\div ۷=\frac{۳}{۷}\notin A$$

حل مثال‌های مهم مجموعه‌ها و احتمال:

مثال **۵۹:** سکه‌ای را یک‌بار پرتاب می‌کنیم. اگر پشت بیاید، آن‌گاه تاس را می‌ریزیم و اگر رو بیاید، سکه را دو بار دیگر پرتاب می‌کنیم.

الف) مجموعه‌ی همه‌ی حالت‌های ممکن را بنویسید و آن را S بنامید.

جواب S = {(پ,۱) , (پ,۲) , (پ,۳) , (پ,۴) , (پ,۵) , (پ,۶) , (ر,ر,ر) , (ر,ر,پ) , (ر,پ,ر) , (ر,پ,پ)}

ب) اگر A پیشامدی باشد که در آن دقیقاً یک‌بار سکه پشت بیاید، عضوهای این پیشامد را بنویسید.

جواب A = {(پ,۱) , (پ,۲) , (پ,۳) , (پ,۴) , (پ,۵) , (پ,۶) , (ر,ر,پ) , (ر,پ,ر)}

ج) اگر B پیشامدی باشد که در آن دقیقاً دو بار سکه رو بیاید، عضوهای این پیشامد را بنویسید.

جواب

B = {(ر,ر,پ) , (ر,پ,ر)}

د) پیشامد $A'\cup B$ را بنویسید.

جواب

A' = {(ر,ر,ر) , (پ,پ,ر)}

A'∪B = {(ر,ر,پ) , (ر,پ,ر) , (ر,ر,ر) , (پ,پ,ر)}

مثال **۶۰:** هریک از عددهای طبیعی زوج کوچک‌تر یا مساوی ۲۰ را روی یک کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارت‌ها، یکی از آن‌ها را به تصادف برمی‌داریم.

الف) مجموعه‌ی همه‌ی حالت‌های ممکن را بنویسید و آن را S بنامید.

جواب

$$S=\{۲\,,۴\,,۶\,,۸\,,۱۰\,,۱۲\,,۱۴\,,۱۶\,,۱۸\,,۲۰\}$$

ب) اگر A پیشامدی باشد که در آن عدد روی کارت مضرب ۵ باشد، احتمال رخ دادن پیشامد A را تعیین کنید.

جواب

$$A=\{۱۰\,,۲۰\}$$

$$n(S)=۱۰ \qquad , \qquad n(A)=۲$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲}{۱۰}=\frac{۱}{۵}$$

ج) اگر B پیشامدی باشد که در آن عدد روی کارت کوچک‌تر از ۶ باشد، احتمال رخ دادن پیشامد B را تعیین کنید.

جواب

$$B=\{۲\,,۴\}$$

$$n(S)=۱۰ \qquad , \qquad n(B)=۲$$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۲}{۱۰}=\frac{۱}{۵}$$

د) پیشامد $A'\cap B$ را بنویسید و احتمال رخ دادن آن را تعیین کنید.

جواب

$$S=\{۲\,,۴\,,۶\,,۸\,,۱۲\,,۱۴\,,۱۶\,,۱۸\}$$

$$A'\cap B=\{۲\,,۴\}$$

$$n(S)=۱۰ \qquad , \qquad n(A'\cap B)=۲$$

$$P(A'\cap B)=\frac{n(A'\cap B)}{n(S)}=\frac{۲}{۱۰}=\frac{۱}{۵}$$

مثال ۶۱: یک طرف سکه‌ای عدد ۱ و طرف دیگر آن عدد ۲ نوشته شده است. این سکه را ۳ بار پرتاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال این‌که مجموع رقم‌های ظاهر شده برابر ۵ باشد.

جواب

$$S=\{(۱,۱,۱),(۱,۱,۲),(۱,۲,۱),(۲,۱,۱),(۲,۲,۱),(۲,۱,۲),(۱,۲,۲),(۲,۲,۲)\}$$

$$A=\{(۲,۲,۱),(۲,۱,۲),(۱,۲,۲)\}$$

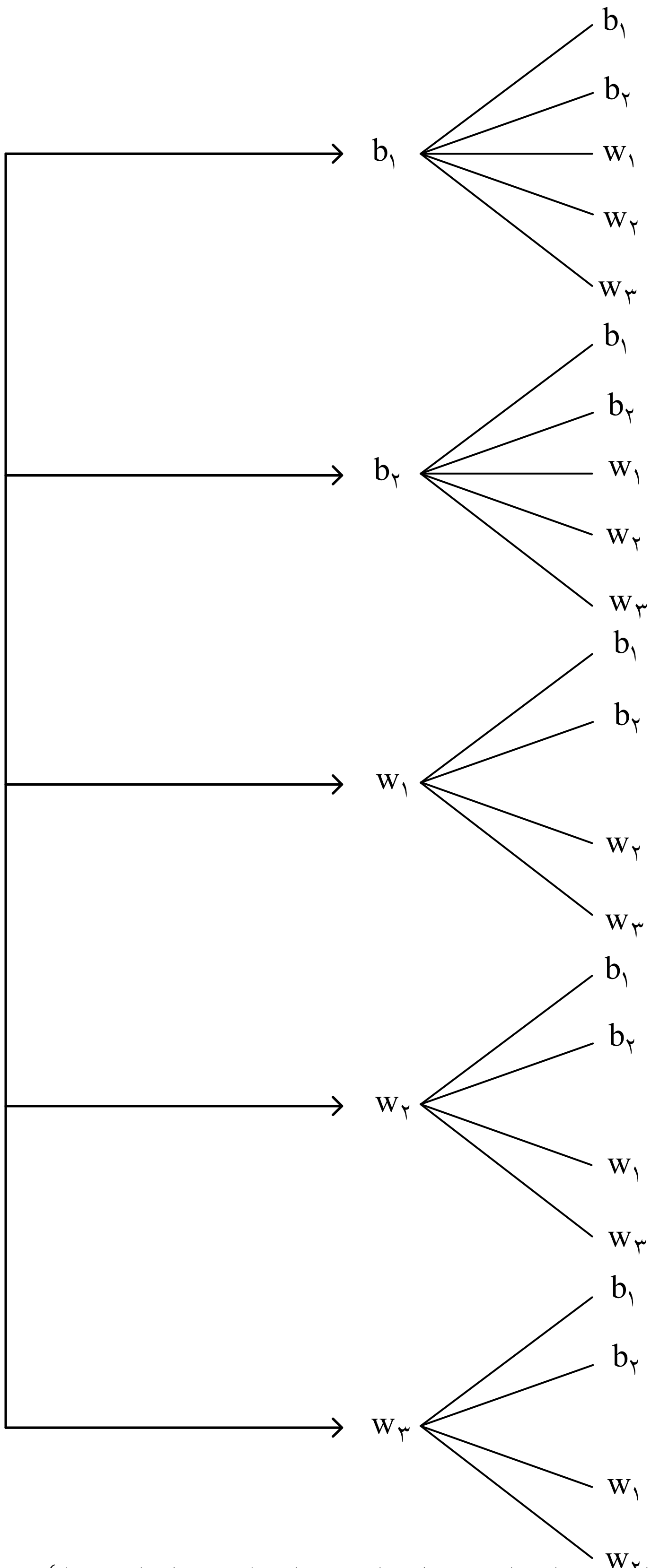
$$n(S)=۸ \qquad , \qquad n(A)=۳$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۸}$$

مثال ۶۲: در ظرفی ۲ مهره‌ی سیاه متمایز و ۳ مهره‌ی سفید متمایز قرار دارد. به‌طور تصادفی دو مهره به‌ترتیب از این ظرف برمی‌داریم؛ بدین صورت که اگر مهره‌ی اول سیاه باشد، مهره را به ظرف برگردانده و سپس مهره‌ی دوم را خارج می‌کنیم. مطلوب است احتمال این‌که:

الف) حداقل یک‌بار مهره‌ی سیاه ظاهر شود.

جواب اگر مهره‌های سیاه را با $b_۱$ و $b_۲$ و مهره‌های سفید را با $w_۱$، $w_۲$ و $w_۳$ نشان دهیم، داریم:



$$\begin{aligned} S = \{ & (b_1, b_1), (b_1, b_2), (b_1, w_1), (b_1, w_2), (b_1, w_3), (b_2, b_1), (b_2, b_2), (b_2, w_1), \\ & (b_2, w_2), (b_2, w_3), (w_1, b_1), (w_1, b_2), (w_1, w_2), (w_1, w_3), (w_2, b_1), \\ & (w_2, b_2), (w_2, w_1), (w_2, w_3), (w_3, b_1), (w_3, b_2), (w_3, w_1), (w_3, w_2)\} \end{aligned}$$

$$A=\{(b_1,b_1),(b_1,b_2),(b_1,w_1),(b_1,w_2),(b_1,w_3),(b_2,b_1),(b_2,b_2),(b_2,w_1),$$
$$(b_2,w_2),(b_2,w_3),(w_1,b_1),(w_1,b_2),(w_2,b_1),(w_2,b_2),(w_3,b_1),(w_3,b_2)\}$$

$n(S)=۲۲ \quad , \quad n(A)=۱۶$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۶}{۲۲}=\frac{۸}{۱۱}$$

ب) مهره‌های اول و دوم هم‌رنگ باشند.

جواب

$$B=\{(b_1,b_1),(b_1,b_2),(b_2,b_1),(b_2,b_2),(w_1,w_2),$$
$$(w_1,w_3),(w_2,w_1),(w_2,w_3),(w_3,w_1),(w_3,w_2)\}$$

$n(S)=۲۲ \quad , \quad n(B)=۱۰$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۱۰}{۲۲}=\frac{۵}{۱۱}$$

مثال ۶۳: در یک کیسه ۴۸ مهره وجود دارد که $\frac{۱}{۶}$ آن‌ها قرمز، $\frac{۱}{۴}$ آن‌ها زرد، نیمی از آن‌ها آبی و بقیه سفید هستند.

الف) از هر رنگ چه تعداد مهره درون کیسه است؟

جواب

تعداد مهره‌های قرمز $\frac{۱}{۶}\times ۴۸=۸$

تعداد مهره‌های زرد $\frac{۱}{۴}\times ۴۸=۱۲$

تعداد مهره‌های آبی $\frac{۱}{۲}\times ۴۸=۲۴$

تعداد مهره‌های سفید $۴۸-(۸+۱۲+۲۴)=۴$

ب) اگر به تصادف یک مهره از کیسه خارج کنیم، احتمال‌های زیر را تعیین کنید.

۱) مهره قرمز باشد.

۲) مهره سفید باشد.

۳) مهره زرد یا آبی باشد.

۴) مهره قرمز نباشد.

جواب

۱)

$n(S)=۴۸$

$n(A)=۸$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۸}{۴۸}=\frac{۱}{۶}$$

۲)
$$n(B)=۴$$
$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۴}{۴۸}=\frac{۱}{۱۲}$$

۳)
$$n(C)=۱۲+۲۴=۳۶$$
$$P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{۳۶}{۴۸}=\frac{۳}{۴}$$

۴)
$$P(D)=۱-P(A)=۱-\frac{۱}{۶}=\frac{۵}{۶}$$

مثال ۶۴: روی یک صفحه شطرنج (۸×۸) یک نقطه درون یکی از خانه‌ها انتخاب می‌کنیم.

الف) احتمال این‌که نقطه روی خانه‌ی سفید نباشد، چه‌قدر است؟

جواب روی خانه‌ی سفید نبودن یعنی روی خانه‌ی سیاه بودن و چون نصف خانه‌های شطرنج سیاه است، پس داریم:

$$P(A)=\frac{۳۲}{۶۴}=\frac{۱}{۲}$$

ب) احتمال این‌که نقطه نه روی خانه‌ی سفید و نه روی خانه‌ی سیاه و نه روی خطوط بین آن‌ها باشد، چه‌قدر است؟

جواب احتمال این پیشامد صفر است؛ زیرا چنین امکانی وجود ندارد (همه‌ی خانه‌های موجود یا سیاه هستند یا سفید).

$$P(B)=۰$$

ج) احتمال این‌که نقطه روی خانه‌ی سفید یا سیاه باشد، چه‌قدر است؟

جواب احتمال این پیشامد ۱ است؛ زیرا یک پیشامد حتمی است (مهره یا روی خانه‌های سفید است یا روی خانه‌های سیاه).

$$P(C)=۱$$

تمرین

۱- اگر A، B و C سه مجموعه بوده و داشته باشیم $B \cup C = B$ و $A \cap C = A$، رابطه‌ی بین سه مجموعه‌ی A، B و C را مشخص کنید. سپس وضعیت سه مجموعه را با استفاده از نمودار وِن نشان دهید.

۲- هرگاه تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی $۲k$ عضوی ۳۲ برابر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی k عضوی باشد، مقدار k را به‌دست آورید.

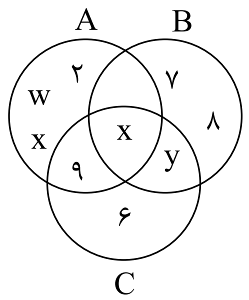
۳- اگر $M = \{x \mid x \in \mathbb{N} \,,\, x < ۲۰\}$، $A = \left\{x \in M \mid \frac{۱۸}{x} \in M\right\}$، $B = \{x \mid x \in M \,,\, x = ۳k \,,\, k \in \mathbb{Z}\}$ و $C = \{x \mid x \in M \,,\, ۴ < x \,,\, x < ۱۶\}$، آن‌گاه:

الف) مجموعه‌های M، A، B و C را با نوشتن عضوها مشخص کنید.

ب) $(B - C) - A$ را بیابید.

ج) حاصل $(A \Delta B) \Delta C$ را بنویسید.

۴- مطابق شکل زیر، سه مجموعه‌ی A، B و C مفروض هستند. اگر $A \cup B \cup C = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$، $A \cap B = \{۱\}$ و $B \cap C = \{۱,۳\}$، حاصل $w + z$ را به‌دست آورید.



---

۵) سکه‌ای را ۵ بار می‌اندازیم. احتمال این‌که دقیقاً ۴ بار رو بیاید، چه‌قدر است؟

توجه **دانش‌آموزان عزیز، برای حل تمرین‌های بیش‌تر می‌توانید به کتاب «تفکر، تمرین، تسلط» مراجعه نمایید.**